Вопросы к зачету по олимпиадной математике. 8 класс. 1 группа

1. Определения дерева. Доказательство эквивалентности определений.

2. Существование висячих вершин в дереве. Остовное дерево. Доказательство существования остовного дерева для связного графа.

3. В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трём авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из каждого города в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?

4. Каждая грань кубика разбита на 4 квадрата. Некоторые стороны этих квадратов раскрасили в красный цвет — всего 26 сторон. Докажите, что на поверхности кубика найдется замкнутая ломаная из красных отрезков.

5. В классе 30 человек. За месяц было 29 дежурств, в каждом дежурила пара учеников. Докажите, что можно так выставить всем ученикам класса по одной оценке по 5-балльной шкале, что будет выставлена хотя бы одна пятерка, и в каждой паре дежуривших сумма оценок будет равна 8.

6. В компании из n человек ($n > 3$) у каждого появилась новость, известная ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за $2n-4$ разговора все они могут узнать все новости.

7. Дан граф, содержащий $2n$ вершин и не менее чем n^2+1 ребро. Докажите, что в нем есть три вершины, попарно соединенные ребрами.

8. Планарные графы. Определение. Формула Эйлера для связного планарного графа. Формула Эйлера для графа с k компонентами.

9. Неравенства для планарного графа.

10. Докажите, что конечная плоская карта допускает раскраску в 6 цветов такую, что соседние страны будут окрашены в разные цвета.

11. Всегда ли выпуклый многогранник является плоским графом?

12. Пусть связный граф G имеет остовные деревья с m и n висячими вершинами, $m < n$. Докажите, что для любого натурального k ($m < k < n$), в G есть остовное дерево ровно с k вершинами.

13. Принцип Дирихле в графах. Задача Рамсея.

14. Для любых 30 городов верно, что между какими-то двумя из них есть дорога. Докажите, что есть город, из которого выходит больше 20 дорог, если всего городов 610.

15. Принцип зацикливания. Принцип зацикливания назад.

16. Докажите, что для любого натурального $n > 1$, в ряде Фибоначчи существует бесконечно много членов
а) имеющих остаток 1 при делении на n;
б) делящихся на n.

17. На бесконечной в обе стороны ленте записан текст на русском языке. Известно, что в этом тексте число различных кусков из 15 символов равно числу различных кусков из 16 символов. Докажите, что на ленте записан «периодический» текст, например: ...мамамыларамумамамылараму...

18. Назовем целое число хорошим, если оно представляется в виде суммы 2 квадратов(5-хорошее $5 = 1^2+2^2$, 3 - нет). Докажите, что произведение двух хороших будет хорошим.

19. Найдите пару натуральных чисел x и y таких, что $x^2+y^2 = 19451945$.

20. Докажите для любых a, b, c, что $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$.

21. Пусть $0 < x, y < 2$. Докажите, что $\frac{4-x-y}{x+y-xy} \geq 1$.

22. Докажите, что многочлен $x^{12}-x^9+x^4-x+1$ при всех значениях x положителен.

23. Формулы разности и суммы n степеней.

24. Как просуммировать выражение $1+x+\ldots+x^n$?

25. Найдите все натуральные значения n, при которых n^5+2 делится на $n+2$.

26. Даны 2000 чисел 11,101,1001, 10001, ... Докажите, что среди этих чисел меньше 20 простых.

27. Рациональные и иррациональные числа. Докажите, что сумма, разность, произведение и частное любых двух рациональных чисел также является рациональным числом (кроме случая, когда возникает деление на ноль).

28. Докажите, что число является рацильнальным тогда и только тогда, когда его можно представить в виде конечно или периодической десятичной дроби.

29. Докажите, что для натурального $\sqrt{n}$ является рациональным числом тогда и только тогда, когда n — квадрат целого числа.

30. а)Докажите, что $\sqrt{2}$ — иррациональное число.
б)Докажите, что для натурального $\sqrt{n}$ является рациональным числом тогда и только тогда, когда n — квадрат целого числа.

31. Докажите, что на любом отрезке числовой прямой (сколь угодно малом) обязательно есть
а) рациональное число; б) иррациональное число.

32. Может ли иррациональное число в иррациональной степени быть рациональным?

33. Докажите, что если $(a+b\sqrt{p})^n = A_n+B_n\sqrt{p}$, где p —- натуральное число, не являющееся квадратом, а числа a, b, A_n, B_n — рациональны, то $(a-b\sqrt{p})^n = A_n-B_n\sqrt{p}$.

34. Найдите первые 1000 знаков после запятой у следующих чисел
а)$(6+\sqrt{35})^{1999}$; б) $(6+\sqrt{37})^{2000}$; в)$(6+\sqrt{39})^{1999}$.

35. а) Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал сумму чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица сложения»). Какое наибольшее количество сумм в этой таблице могли оказаться рациональными числами?
б) То же самое, только Олег вписывал произведения вместо сумм.

36. Числовое множество M, содержащее 2021 различных чисел, таково, что для любых двух различных элементов a, b из M число $a^2+b\sqrt{2}$ рационально. Докажите, что любого A из M число $A\sqrt{2}$ рационально.

37. Игры. Передача хода. Есть 99! бактерий. Разрешается за ход убить не больше 1% бактерий. Проигрывает тот, у кого нет хода. Кто выиграет при правильной игре?

38. Дискретная непрерывность. Пример задачи.

39. Существуют ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых чисел?

40. а) Докажите, что можно провести прямую так, чтобы по одну сторону от неё лежало ровно 100 точек
б) Докажите, что можно нарисовать круг, внутри которого лежит ровно 100 точек.

41. В квадрате со стороной 1 отметили 51 точку. Докажите, что три из них можно покрыть кругом радиуса 1/7.

42. Внутри квадрата со стороной 1 расположено несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Докажите, что найдётся прямая, пересекающая по крайней мере четыре из этих окружностей.

43. Малая теорема Ферма.

44. Число $a^2 + ab + b^2$ делится на простое вида $p = 3k + 2$. Докажите, что a и b делятся на p.

45. Пусть p — простое число, тогда $(11\ldots122\ldots233\ldots99 - 123456789)$ (в первом числе каждая цифра встречается ровно p раз) делится на p.

46. Функция Эйлера. Доказательство мультипликативности и вывод формулы.

47. Теорема Эйлера.

48. Докажите, что $(n^{84} - n^4)$ делится на 20400 для любого натурального n.

49. Докажите, что $2^{2^{\cdots^{2^2}}} - 2^{2^{\cdots^{2^2}}}$ (в первом слагаемом n двоек, во втором — $n-1$) делится на все числа от 1 до n.

50. Теорема Вильсона.

51. Простое или составное число $\dfrac{2014! + 1009}{1009}$?

52. Китайская теорема об остатках.

53. Докажите, что существует миллион последовательных чисел, ни одно из которых не является точной степенью.

54. Назовём число неадекватным, если количество различных его простых делителей превосходит наименьший из них. Есть ли 2018 неадекватных чисел подряд?

55. а) В арифметической прогрессии есть член, делящийся на 1000 и есть член, делящийся на 1001. Докажите, что в прогрессии есть член, делящийся на 1001000.
б) Дана бесконечная арифметическая прогрессия из натуральных чисел. Докажите, что в ней есть число у которого есть 1000 различных простых делителей.
в) Дана бесконечная арифметическая прогрессия из натуральных чисел. Докажите, что в этой прогрессии можно выделить миллион соседних членов, у каждого из которых хотя бы 1000 различных простых делителей.

56. Неравенство Коши.

57. Найдите минимальное значение выражения

$$\sqrt{x_1^2 + (1-x_2)^2} + \sqrt{x_2^2 + (1-x_3)^2} + \ldots + \sqrt{x_n^2 + (1-x_1)^2}$$

58. Докажите, что для положительного $a > 0$
а)$a^4 + b^4 + 2c^2 \geq 4abc$

б) $a^{10} + \frac{3}{a^2} + \frac{4}{a} \geq 8$

в)$a^{40} + \frac{1}{a^{16}} + \frac{2}{a^4} + \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a} \geq 16$

59. Докажите, что $\frac{x}{x^4+y^2} + \frac{y}{x^2+y^4} \leq \frac{1}{xy}$.

60. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{x_2} = 2 \\ x_2 + \frac{1}{x_3} = 2 \\ \ldots \\ x_{99} + \frac{1}{x_{100}} = 2 \\ x_{100} + \frac{1}{x_1} = 2 \end{cases}$$

61. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \geq x_1(x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$.

62. Для любых x, y, z докажите неравенство $\sin^2 x \cos y + \sin^2 y \cos z + \sin^2 z \cos x \leq \frac{3}{2}$.

Вопросы к зачету по олимпиадной математике. 8 класс. 2 группа

1. Графы. Подвешивание.

2. В стране 125 городов, некоторые из которых соединены друг с другом дорогами. Из каждого города выходит хотя бы 5 дорог. Докажите, что существует циклический маршрут, состоящий из не более чем 6 городов.)

3. Вася отметил на плоскости 2020 точек и соединил их их 4100 линиями. Докажите, что Вася существует циклический маршрут, состоящий из не более чем 20 городов.

4. В компании из n человек среди любых четырех есть знакомый с тремя остальными. Докажите, что есть человек, который знает всех.

5. Дан граф, содержащий $2n$ вершин и не менее чем $n^2 + 1$ ребро. Докажите, что в нем есть три вершины, попарно соединенные ребрами.

6. Принцип Дирихле в графах. Задача Рамсея.

7. Для любых 30 городов верно, что между какими-то двумя из них есть дорога. Докажите, что есть город, из которого выходит больше 20 дорог, если всего городов 610.

8. В классе 30 человек. За месяц было 29 дежурств, в каждом дежурила пара учеников. Докажите, что можно так выставить всем ученикам класса по одной оценке по 5-балльной шкале, что будет выставлена хотя бы одна пятерка, и в каждой паре дежуривших сумма оценок будет равна 8.

9. Есть несколько точек, некоторые из которых соединены дугами так, что из любой точки в любую другую можно добраться по этим дугам. Докажите, что на любой дуге можно поставить синюю и красную стрелки в противоположных направлениях так, чтобы из любой точки в любую можно было пройти таким путем, на котором цвет стрелки меняется не более одного раза. Идти при этом разрешается только в направлении, указываемом стрелкой какого-либо цвета.

10. В стране Альфия 150 городов, некоторые из которых соединены железнодорожными экспрессами, не останавливающимися на промежуточных станциях. Известно, что любые четыре города можно разбить на две пары так, что между городами каждой пары курсирует экспресс. Какое наименьшее число пар городов соединено экспрессами?

11. Геометрия. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC проведена биссектриса BD, на продолжении BC выбрана точка E так что $\angle EDB$ – прямой. Найдите BE, если $CD = 1$.

12. Точки E и K — середины сторон AD и DC параллелограмма $ABCD$. Из его вершины B на прямую EK опустили перпендикуляр BH. На стороне BC выбрали точку F так, что углы FHK и KED равны. Найдите $BF : FC$.

13. В параллелограмме $ABCD$ из вершины тупого угла проведены две высоты BM и BN, а из вершины D проведены высоты DP и DQ. Докажите, что M, N, P, Q являются вершинами прямоугольника.

14. Про трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC известно, что $AB = BD$. Пусть точка M — середина боковой стороны CD, а O — точка пересечения отрезков AC и BM. Докажите, что треугольник BOC – равнобедренный.

15. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ выбраны такие точки M и N, что $BN = BC$ и $DM = CD$. Докажите, что $AM = AN$.

16. Внутри равностороннего треугольника ABC отмечена произвольная точка M. Докажите, что можно выбрать на стороне AB точку C_1 , на стороне BC — точку A_1 , а на стороне AC — точку B_1 таким образом, чтобы длины сторон треугольника $A_1B_1C_1$ были равны отрезкам MA, MB и MC.

17. Пусть K, L, M и N – середины сторон AB, BC, CD и DA выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что $KM \leq \dfrac{BC + AD}{2}$ причём равенство достигается, только если $BC \| \| AD$

18. Средняя линия четырехугольника образует равные углы с его диагоналями. Докажите, что эти диагонали равны.

19. Параллелограмм Вариньона.

20. Докажите, что отрезки соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника и отрезок, соединяющий середины его диагоналей, пересекаются в одной точке.

21. Докажите, что площадь параллелограмма Вариньона равна половине площади четырехугольника.

22. Каждая сторона выпуклого четырёхугольника разделена на 8 равных частей. Соответствующие точки деления на противоположных сторонах соединены друг с другом, и полученные клетки раскрашены в шахматном порядке. Докажите, что сумма площадей черных клеток равна сумме площадей белых клеток.

23. Дана трапеция $ABCD$ с основанием AD. Биссектрисы внешних углов при вершинах A и B пересекаются в точке P, а при вершинах C и D — в точке Q. Докажите, что длина отрезка PQ равна полупериметру трапеции.

24. Прямая пересекает две соседние стороны параллелограмма. На нее из всех его вершин опущены перпендикуляры. Докажите, что один из них равен сумме трех других.

25. Внутри острого угла расположен выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Оказалось, что для каждой из двух прямых, содержащих стороны угла, выполняется условие: сумма расстояний от вершин A и C до этой прямой равна сумме расстояний от вершин B и D до этой же прямой. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

26. На прямую, проходящую через вершину A треугольника ABC, опущены перпендикуляры BD и CE. Докажите, что середина стороны BC равноудалена от точек D и E.

27. Дана равнобокая трапеция $ABCD$. Рассматривают точки Q и P на боковых сторонах AB и CD соответственно, для которых $CP = AQ$. Докажите, что середины всех таких отрезков PQ лежат на одной прямой.

28. По кругу расставлены 2005 натуральных чисел.Доказать, что найдутся два соседних числа, после выкидывания которых оставшиеся числа нельзя разбить на две группы с равной суммой.

29. Сравнения. Доказательство свойств.

30. Пусть $k \neq 0$. Равносильны ли сравнения $ka \equiv kb \ (mod\ m)$ и $a \equiv b \ (mod\ m)$? А при каких k сравнения равносильны?

31. а)$7x \equiv 1 \ (mod\ 13)$. Какой остаток дает x?
б)Целые x и y таковы, что $5x + 8y$ даёт остаток 1 при делении на 13. Какой остаток при делении на 13 даёт $2x - 2y$?

32. Малая теорема Ферма.

33. Число $a^2 + ab + b^2$ делится на простое вида $p = 3k + 2$. Докажите, что a и b делятся на p.

34. Пусть p — простое число, тогда $(11 \ldots 122 \ldots 233 \ldots 99 - 123456789)$ (в первом числе каждая цифра встречается ровно p раз) делится на p.

35. Функция Эйлера. Доказательство мультипликативности и вывод формулы.

36. Теорема Эйлера.

37. Докажите, что $(n^{84} - n^4)$ делится на 20400 для любого натурального n.

38. Докажите, что $2^{2^{\cdots 2^2}} - 2^{2^{\cdots 2^2}}$ (в первом слагаемом n двоек, во втором — $n-1$) делится на все числа от 1 до n.

39. Теорема Вильсона.

40. Простое или составное число $\dfrac{2014! + 1009}{1009}$?

41. Китайская теорема об остатках.

42. Докажите, что существует миллион последовательных чисел, ни одно из которых не является точной степенью.

43. Назовём число неадекватным, если количество различных его простых делителей превосходит наименьший из них. Есть ли 2018 неадекватных чисел подряд?

44. а) В арифметической прогрессии есть член, делящийся на 1000 и есть член, делящийся на 1001. Докажите, что в прогрессии есть член, делящийся на 1001000.
б) Дана бесконечная арифметическая прогрессия из натуральных чисел. Докажите, что в ней есть число у которого есть 1000 различных простых делителей.
в) Дана бесконечная арифметическая прогрессия из натуральных чисел. Докажите, что в этой прогрессии можно выделить миллион соседних членов, у каждого из которых хотя бы 1000 различных простых делителей.