Постепенное конструирование

1. Лифт в 100-этажном доме имеет 2 кнопки: "+7"и "–9"(первая поднимает лифт на 7 этажей, вторая опускает на 9).Можно ли проехать:
а) с 1-го на 2-й;
б) со 2-го на 1-й;
в) с любого на любой этаж?

2. Дан алгоритм: от прямоугольника с неравными сторонами отрезают квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника; если оставшаяся часть не квадрат, то процесс повторяют. Докажите, что есть прямоугольник, для которого алгоритм закончит работу ровно после 100-го отрезания, причем все отрезанные квадраты будут разного размера (оставшаяся часть не в счет).

3. Как отметить на а) прямой б)окружности 100500 точек так, чтобы все попарные расстояния между ними были различны?

4. В строке в беспорядке записаны числа $1, 2, \dots, 100$.
а) Разрешается менять местами любые два рядом стоящие. Докажите, что можно расставить числа по возрастанию.
б) Разрешается менять местами любые два числа, отличающиеся на 1 (например, 7 и 8), где бы они не стояли. Докажите, что можно расставить числа по возрастанию.
в) Каким наименьшим количеством перестановок можно гарантированно обойтись в том и другом случае?

5. Докажите, что для любого $n > 2$ найдутся n различных натуральных чисел, чья сумма делится на каждое из них.

6. Докажите, что любой треугольник можно разрезать на 101 меньший треугольник так, чтобы у них не было сторон на одной прямой, кроме тех, по которым треугольники примыкают друг к другу.

7. Играют двое. Первый выписывает в строку слева направо 19-значное число из цифр 1 и 2. После выписывания Первым очередной цифры Второй, если хочет, меняет между собой какие-то две цифры из уже написанного ряда. Всегда ли Второй может добиться того, чтобы итоговое число читалось одинаково слева направо и справа налево?

8. а) Докажите, что любой треугольник можно разбить на 25 треугольников, в каждом из которых есть угол 20 градусов. При этом ничего лишнего остаться не должно!
б)Докажите, что любой треугольник можно разбить на 22 треугольника, в каждом из которых есть угол 22 и ещё 23 треугольника, в каждом из которых есть угол 23 градуса. При этом ничего лишнего остаться не должно!

9. На шахматной доске, первоначально пустой, расставляются ладьи по следующему правилу: каждым ходом на доску устанавливается ладья, и, если она кого-нибудь побила, то одна из побитых ею ладей снимается с доски. Какое наибольшее число ладей может оказаться на доске?

10. Докажите, что существует число делящееся на 5^{1000} не содержащее в своей записи ни одного нуля.

Домашнее задание

11. Первоклассник Сёма пока умеет писать только цифры 1 и 7. Докажите, что для любого $n > 29$ он может написать кратное 7 число с суммой цифр n.

Постепенное конструирование

1. Лифт в 100-этажном доме имеет 2 кнопки: "+7"и "–9"(первая поднимает лифт на 7 этажей, вторая опускает на 9).Можно ли проехать:
а) с 1-го на 2-й;
б) со 2-го на 1-й;
в) с любого на любой этаж?

2. Дан алгоритм: от прямоугольника с неравными сторонами отрезают квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника; если оставшаяся часть не квадрат, то процесс повторяют. Докажите, что есть прямоугольник, для которого алгоритм закончит работу ровно после 100-го отрезания, причем все отрезанные квадраты будут разного размера (оставшаяся часть не в счет).

3. Как отметить на а) прямой б)окружности 100500 точек так, чтобы все попарные расстояния между ними были различны?

4. В строке в беспорядке записаны числа $1, 2, \dots, 100$.
а) Разрешается менять местами любые два рядом стоящие. Докажите, что можно расставить числа по возрастанию.
б) Разрешается менять местами любые два числа, отличающиеся на 1 (например, 7 и 8), где бы они не стояли. Докажите, что можно расставить числа по возрастанию.
в) Каким наименьшим количеством перестановок можно гарантированно обойтись в том и другом случае?

5. Докажите, что для любого $n > 2$ найдутся n различных натуральных чисел, чья сумма делится на каждое из них.

6. Докажите, что любой треугольник можно разрезать на 101 меньший треугольник так, чтобы у них не было сторон на одной прямой, кроме тех, по которым треугольники примыкают друг к другу.

7. Играют двое. Первый выписывает в строку слева направо 19-значное число из цифр 1 и 2. После выписывания Первым очередной цифры Второй, если хочет, меняет между собой какие-то две цифры из уже написанного ряда. Всегда ли Второй может добиться того, чтобы итоговое число читалось одинаково слева направо и справа налево?

8. а) Докажите, что любой треугольник можно разбить на 25 треугольников, в каждом из которых есть угол 20 градусов. При этом ничего лишнего остаться не должно!
б)Докажите, что любой треугольник можно разбить на 22 треугольника, в каждом из которых есть угол 22 и ещё 23 треугольника, в каждом из которых есть угол 23 градуса. При этом ничего лишнего остаться не должно!

9. На шахматной доске, первоначально пустой, расставляются ладьи по следующему правилу: каждым ходом на доску устанавливается ладья, и, если она кого-нибудь побила, то одна из побитых ею ладей снимается с доски. Какое наибольшее число ладей может оказаться на доске?

10. Докажите, что существует число делящееся на 5^{1000} не содержащее в своей записи ни одного нуля.

Домашнее задание

11. Первоклассник Сёма пока умеет писать только цифры 1 и 7. Докажите, что для любого $n > 29$ он может написать кратное 7 число с суммой цифр n.