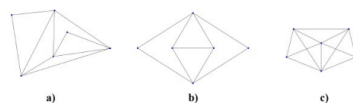


Графы. Эйлеровость

Определение. *Путь в графе, проходящий по всем ребрам, называется эйлеровым.*

1. Пешеход обошёл шесть улиц одного города, пройдя каждую ровно два раза, но не смог обойти их, пройдя каждую лишь раз. Могло ли это быть?
2. а) В графе есть эйлеров путь. Доказать, что граф связан и вершин с нечетной степенью в нем не больше двух.
б) Докажите, что если в графе нет вершин нечетной степени, то он разбивается на непересекающиеся по ребрам замкнутые маршруты.
в) Докажите, что если в связанном графе нет вершин нечетной степени, то его можно обойти так, что мы начнем и закончим в одной и той же точке, пройдя при этом все ребра.
г) Доказать обратное: если в связанном графе вершин с нечётной степенью не больше двух, то в нем есть эйлеров путь.



3. Можно ли нарисовать картинку, изображенные на рисунке, не отрывая карандаша от бумаги? Можно ли при этом закончить рисование в начальной точке?
4. а) Дан кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли, не ломая проволоки, изготовить каркас куба с ребром 10 см?
б) Какое наименьшее число раз придется ломать проволоку, чтобы всё же изготовить требуемый каркас?
5. Посёлок построен в виде квадрата 3 квартала на 3 квартала (кварталы – квадраты со стороной b , всего 9 кварталов). Какой наименьший путь должен пройти асфальтоукладчик, чтобы заасфальтировать все улицы, если он начинает и кончает свой путь в угловой точке A ? (Стороны квадрата – тоже улицы).
6. Любой ли связный граф можно нарисовать не отрывая карандаша от бумаги, если по каждому ребру разрешается проводить ровно два раза?
7. В некоторой стране из каждого города выходит по три железные дороги. Две компании хотят их все приватизировать. Антимонопольный комитет требует, чтобы из каждого города выходили дороги обеих компаний. Докажите, что компании могут договориться так, чтобы требование антимонопольного комитета было выполнено.
8. Докажите, что связный граф с $2n$ нечётными вершинами можно нарисовать, оторвав карандаш от бумаги ровно $n - 1$ раз и не проводя никакое ребро дважды.

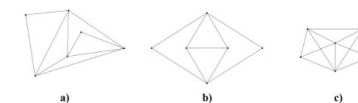
Домашнее задание

9. а) На плоскости дано 100 окружностей, составляющих связную (то есть не распадающуюся на части) фигуру. Докажите, что эту фигуру можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя дважды одну и ту же линию.
б) А если 100 сердечек (сердечки не обязательно рисуются одинаково, обычно сердечком называют любую фигуру напоминающую эту форму)?

Графы. Эйлеровость

Определение. *Путь в графе, проходящий по всем ребрам, называется эйлеровым.*

1. Пешеход обошёл шесть улиц одного города, пройдя каждую ровно два раза, но не смог обойти их, пройдя каждую лишь раз. Могло ли это быть?
2. а) В графе есть эйлеров путь. Доказать, что граф связан и вершин с нечетной степенью в нем не больше двух.
б) Докажите, что если в графе нет вершин нечетной степени, то он разбивается на непересекающиеся по ребрам замкнутые маршруты.
в) Докажите, что если в связанном графе нет вершин нечетной степени, то его можно обойти так, что мы начнем и закончим в одной и той же точке, пройдя при этом все ребра.
г) Доказать обратное: если в связанном графе вершин с нечётной степенью не больше двух, то в нем есть эйлеров путь.



3. Можно ли нарисовать картинку, изображенные на рисунке, не отрывая карандаша от бумаги? Можно ли при этом закончить рисование в начальной точке?
4. а) Дан кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли, не ломая проволоки, изготовить каркас куба с ребром 10 см?
б) Какое наименьшее число раз придется ломать проволоку, чтобы всё же изготовить требуемый каркас?
5. Посёлок построен в виде квадрата 3 квартала на 3 квартала (кварталы – квадраты со стороной b , всего 9 кварталов). Какой наименьший путь должен пройти асфальтоукладчик, чтобы заасфальтировать все улицы, если он начинает и кончает свой путь в угловой точке A ? (Стороны квадрата – тоже улицы).
6. Любой ли связный граф можно нарисовать не отрывая карандаша от бумаги, если по каждому ребру разрешается проводить ровно два раза?
7. В некоторой стране из каждого города выходит по три железные дороги. Две компании хотят их все приватизировать. Антимонопольный комитет требует, чтобы из каждого города выходили дороги обеих компаний. Докажите, что компании могут договориться так, чтобы требование антимонопольного комитета было выполнено.
8. Докажите, что связный граф с $2n$ нечётными вершинами можно нарисовать, оторвав карандаш от бумаги ровно $n - 1$ раз и не проводя никакое ребро дважды.

Домашнее задание

9. а) На плоскости дано 100 окружностей, составляющих связную (то есть не распадающуюся на части) фигуру. Докажите, что эту фигуру можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя дважды одну и ту же линию.
б) А если 100 сердечек (сердечки не обязательно рисуются одинаково, обычно сердечком называют любую фигуру напоминающую эту форму)?