Вопросы к зачету по олимпиадной математике. 7 класс. 1 группа

1. Графы. Эйлеров путь, эйлеров цикл. Критерий эйлеровости графа.

2. Докажите, что связный граф с $2n$ нечётными вершинами можно нарисовать, оторвав карандаш от бумаги ровно $n-1$ раз и не проводя никакое ребро дважды.

3. Лемма о рукопожатиях. На столе лежат монеты достоинством в 1, 2, 3 и 5 копеек на сумму 9 рублей 99 копеек. Может ли число соседей каждой монеты быть равно её достоинству? (Монеты – соседи, если они касаются друг друга)

4. Могут ли степени вершин в графе быть равны:
а) 8, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2?
б) 7, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 1?
в) 6, 6, 6, 5, 5, 3, 2, 2?

5. В одной стране из каждого города выходит 100 дорог и от любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от любого города можно добраться до любого другого.

6. Имеются две страны: Обычная и Зазеркалье. У каждого города в Обычной стране есть "двойник"в Зазеркалье, и наоборот. Однако если в Обычной стране какие-то два города соединены железной дорогой, то в Зазеркалье эти города не соединены, а каждые два несоединённых в Обычной стране города обязательно соединены железной дорогой в Зазеркалье. В Обычной стране девочка Алиса не может проехать из города А в город В, сделав менее двух пересадок. Доказать, что Алиса в Зазеркалье сможет проехать из любого города в любой другой, сделав не более двух пересадок.

7. В стране больше 101 города. Столица соединена авиалиниями со 100 городами, а каждый город, кроме столицы, соединён авиалиниями ровно с десятью городами (если А соединён с В, то В соединён с А). Известно, что из каждого города можно попасть в любой другой (может быть, с пересадками). Доказать, что можно закрыть половину авиалиний, идущих из столицы, так, что возможность попасть из каждого города в любой другой сохранится.

8. Двудольные графы. Сумма степеней одной доли. Критерий двудольности графа.

9. Можно ли расставить 777 шахматных коней на доске 2017×2017 так, чтобы каждый из них бил ровно 4 других?

10. В графе n вершин.
а) Сколько минимум в нем может быть ребер, чтобы он был связен?
б) Сколько максимум в нем может быть ребер, чтобы он был не связен?

11. Делимость. Докажите, что у составного числа a найдется такой простой делитель p, что $p^2 \leq a$.

12. На доске записаны двузначные числа. Каждое число составное, но любые два числа взаимно просты. Какое наибольшее количество чисел может быть записано?

13. Докажите, что простых чисел бесконечно много.

14. Существуют ли 100 подряд идущих составных чисел?

15. Основная теорема арифметики.

16. Определение остатка. Действия с остатками. Найдите остаток при делении на 7 числа 143^{45}.

17. Назовем натуральное n удобным, если n^2+1 делится на 2501. Докажите, что среди $1, \ldots, 2500$ четное количество удобных чисел.

18. Докажите, что число 108 нельзя представить в виде суммы двух точных кубов.

19. Пусть $P_n = p_1 p_2 \ldots p_n$ — произведение первых n простых чисел ($n > 1$). Докажите, что а) $P_n - 1$ б) $P_n + 1$ не является полным квадратом.

20. Признаки делимости на $2^n, 5^n, 9, 11, 7, 13$.

21. Даны 19 карточек. Можно ли на каждой из карточек написать ненулевую цифру так, чтобы из этих карточек можно было сложить ровно одно 19-значное число, кратное на 11?

22. Найдите наибольшее число из которого вычеркиванием цифр нельзя получить число делящееся на 11.

23. а) Докажите, что у любого числа вида $4k+3$, есть простой множитель такого же вида.
б) Докажите, что множество простых чисел вида $p = 4k+3$ бесконечно.

24. Какое наибольшее количество из натуральных чисел, не превосходящих $2n$, можно выбрать так, чтобы ни одно из них не делилось на другое?

25. Обратный ход. У Васи есть 3 бруска разной длины, раз в минуту Вася может отпилить от одного бруска, кусок с длиной равной разности длин двух других брусков. Может ли Вася в ходе таких операций получить 3 одинаковых бруска?

26. Инвариант. В клетчатом квадрате $n \times n$ одна угловая клетка белая, а все остальные -— черные. Разрешается взять любую строку или столбец квадрата и поменять в ней цвет каждой клетки. Можно ли такими операциями перекрасить все клетки квадрата в белый,если
а) n чётно ;
б) n нечётно и $n > 1$;
в) Пусть $n > 4$, но закрашена не угловая клетка, а соседняя с ней. При этом дополнительно можно перекрашивать любые диагонали (не только главные).

27. Есть три кучки камней: 51 камень – в первой, 49 – во второй, 5 – в третьей. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из четного количества камней, на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

28. На доске выписаны числа $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{100}$. Разрешается стереть любые два числа a и b заменить их на число $ab + a + b$. Какое число останется после 99 таких операций?

29. Принцип крайнего. На шахматной доске стоит несколько ладей. Может ли быть так, что все бьют три ладьи?

30. На полях шахматной доски расставлены числа 1, 2, ..., 64. Докажите, что найдется пара соседних по стороне клеток, где числа отличаются не меньше, чем на 5.

31. Постепенное конструирование. На шахматной доске, первоначально пустой, расставляются ладьи по следующему правилу: каждым ходом на доску устанавливается ладья, и, если она кого-нибудь побила, то одна из побитых ею ладей снимается с доски. Какое наибольшее число ладей может оказаться на доске?

32. Докажите, что существует число делящееся на 5^{1000} не содержащее в своей записи ни одного нуля.

33. Полупризнак равенства треугольников.

34. Теорема Пифагора и обратная ей. Египетский треугольник и другие прямоугольные треугольники с целыми сторонами.

35. Индукция. Пример доказательства тождества по индукции.

36. Докажите, что $2^{3^n}+1$ делится на 3^{n+1}.

37. $2m$-значное число назовём справедливым, если его чётные разряды содержат столько же чётных цифр, сколько и нечётные. Докажите, что в любом $2m+1$-значном числе можно вычеркнуть одну из цифр так, чтобы полученное $2m$-значное число было справедливым.

38. Неравенство Бернулли.

39. Можно ли разрезать на такие трехклеточные уголки квадрат следующих размеров без одной клетки (вырезана может быть любая клетка квадрата, даже откуда-то из середины) $2^n \times 2^n$?

40. Ханойские башни. Есть три стержня и несколько колец разного размера. Класть можно только кольцо меньшего размера на кольцо большего размера. За какое наименьшее количество перекладываний можно переместить n колец?

41. На какое количество частей делят плоскость n прямых таких, что среди них нет параллельных и любые 3 не пересекаются в одной точке?

42. Какое наибольшее количество диагоналей можно провести в n-угольнике?

43. Телескопические суммы. Пример задачи.

44. Комбинаторика. Правило сложения и произведения. Как найти количество делителей числа n?

45. Комбинаторика. Перестановки, размещения, сочетания.

46. а)На плоскости дано n точек. Сколько имеется отрезков с концами в этих точках?
б)На плоскости отмечено n точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?
в)На плоскости дано n прямых таких, что никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Чему равно число образованных ими треугольников?

47. На двух параллельных прямых выбраны точки $A_1, A_2, \ldots, A_m$ и $B_1, B_2, \ldots, B_n$ соответственно и проведены все отрезки вида A_iB_j $(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$. Сколько будет точек пересечения, если известно, что никакие три из этих отрезков в одной точке не пересекаются?

48. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник, стороны a и b $(a, b$ - целые) которого идут по линиям сетки. Найдите количество способов добраться из левого нижнего угла прямоугольника в правый верхний угол, если можно двигаться только по линиям сетки, причем только вправо и вверх.

49. Метод шаров и перегородок. Непустые ящики и любые. Сочетания с повторениями. Компания друзей отправила одного из них в магазин за чипсами. Он пришел с твердым намерением купить 5 пачек чипсов. В магазине оказалось их всего 7 видов. Сколькими способами посланник может выполнить свою миссию?

50. Свойства сочетаний.

51. Треугольник Паскаля.

52. а) Докажите, что $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + ... + C_{k-1}^{k-1}$.
б) Докажите, что $C_n^k = C_{n-1}^{k} + C_{n-2}^{k-1} + ... + C_{n-k-1}^{0}$.

53. Докажите, что число а равно количеству путей, ведущих из вершины треугольника Паскаля к месту, где стоит число а.(Мы можем двигаться только вниз от вершины, переходя к одному двух из чисел на следующей строке, между которыми оно стоит.)

54. Докажите, что каждое число а в треугольнике Паскаля, уменьшенное на 1, равно сумме всех чисел, заполняющих параллелограмм, ограниченный теми правой и левой диагоналями, на пересечении которых стоит число а (сами эти диагонали в рассматриваемый параллелограмм не включаются).

55. Бином Ньютона.

56. При каких натуральных n число $(\sqrt{2}+1)^n - (\sqrt{2}-1)^n$ будет целым?