Вариации

1. На отрезке AB отмечено $2n$ различных точек, симметричных относительно середины AB. При этом n из них покрашены в красный цвет, оставшиеся n — в синий. Докажите, что сумма расстояний от точки A до красных точек равна сумме расстояний от точки B до синих точек.

2. Сумма нескольких натуральных чисел равна 2021. Найдите максимальное возможное их произведение.

3. На окружности расставлено несколько положительных чисел, каждое из которых не больше 1. Докажите, что можно разделить окружность на 2021 дугу так, что суммы чисел на соседних дугах будут отличаться не больше чем на 1. (Если на дуге нет чисел, то сумма на ней считается равной нулю).

4. В однокруговом турнире по теннису участвовало $2n + 1$ человек: p_1, p_2, $\ldots$, p_{2n+1} (каждый сыграл с каждым ровно один раз, ничьих не бывает). Пусть игрок p_i одержал w_i побед. Найдите максимум и минимум (в зависимости от n) величины $w_1^2 + w_2^2 + \ldots + w_{2n+1}^2$.

5. 49 дачников получили садовые участки. Каждый участок представляет собой квадрат 1×1, и все участки вместе составляют квадрат 7×7. Каждый дачник враждует не более, чем с шестью другими дачниками. Докажите, что можно распределить участки таким образом, чтобы участки враждущих дачников не были соседними по стороне.

6. На прямой отмечены $2n$ различных точек, при этом n из них покрашены в красный цвет, остальные n — в синий. Докажите, что сумма попарных расстояний между точками одного цвета не превосходит суммы попарных расстояний между точками разного цвета.

7. При составлении олимпиады для каждой из параллелей 5–11 классов требуется подготовить по 15 задач, при этом у любых двух параллелей может быть не более пяти общих задач. Какое наименьшее количество задач нужно подготовить?

Вариации

1. На отрезке AB отмечено $2n$ различных точек, симметричных относительно середины AB. При этом n из них покрашены в красный цвет, оставшиеся n — в синий. Докажите, что сумма расстояний от точки A до красных точек равна сумме расстояний от точки B до синих точек.

2. Сумма нескольких натуральных чисел равна 2021. Найдите максимальное возможное их произведение.

3. На окружности расставлено несколько положительных чисел, каждое из которых не больше 1. Докажите, что можно разделить окружность на 2021 дугу так, что суммы чисел на соседних дугах будут отличаться не больше чем на 1. (Если на дуге нет чисел, то сумма на ней считается равной нулю).

4. В однокруговом турнире по теннису участвовало $2n + 1$ человек: p_1, p_2, $\ldots$, p_{2n+1} (каждый сыграл с каждым ровно один раз, ничьих не бывает). Пусть игрок p_i одержал w_i побед. Найдите максимум и минимум (в зависимости от n) величины $w_1^2 + w_2^2 + \ldots + w_{2n+1}^2$.

5. 49 дачников получили садовые участки. Каждый участок представляет собой квадрат 1×1, и все участки вместе составляют квадрат 7×7. Каждый дачник враждует не более, чем с шестью другими дачниками. Докажите, что можно распределить участки таким образом, чтобы участки враждущих дачников не были соседними по стороне.

6. На прямой отмечены $2n$ различных точек, при этом n из них покрашены в красный цвет, остальные n — в синий. Докажите, что сумма попарных расстояний между точками одного цвета не превосходит суммы попарных расстояний между точками разного цвета.

7. При составлении олимпиады для каждой из параллелей 5–11 классов требуется подготовить по 15 задач, при этом у любых двух параллелей может быть не более пяти общих задач. Какое наименьшее количество задач нужно подготовить?