

Большой планиметрический разнобой.

ПВГ 5 задач, Ломоносов 8, Курчатов 5, Высшая проба 6(7), ОММО 10, Физтех 7(6), ММО 6+6.

- (ПВГ 10-11.2) Медиана AM треугольника ABC перпендикулярна его биссектрисе BL . Найдите площадь треугольника ABM , если площадь треугольника ABL равна 10.
- (ОММО 11.4) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке E . Через точку E проведена касательная к окружности, которая пересекает катет CB в точке D . Найдите длину DB , если $AE = 6$, а $BE = 2$.
- (ОММО 11.4) Точка O лежит внутри равнобедренного прямоугольного треугольника ABC . Расстояние от неё до вершины A прямого угла равно 6, до вершины B равно 4, до вершины C равно 8. Найдите площадь треугольника ABC .
- (Курчатов 11.3) Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке O . На AB отметили точку E такую, что прямая EO параллельна основаниям трапеции. Оказалось, что EO - биссектриса угла CED . Докажите, что трапеция - прямоугольная.
- (ПВГ 10-11.3) Найдите площадь треугольника ABC , в котором $AB = 4$, $AC = 5$ и $\cos(\angle B - \angle C) = \frac{11}{16}$.
- (Высшая проба 11.3) Треугольник ABC , в котором $AB > AC$, вписан в окружность с центром в точке O . В нём проведены высоты AA' и BB' , и BB' повторно пересекает описанную окружность в точке N . Пусть M - середина отрезка AB . Докажите, что если $\angle OBN = \angle NBC$, то прямые AA' , ON и MB' пересекаются в одной точке.
- (Физтех 11.4) Окружности Ω и ω касаются внешним образом в точке F , а их общая внешняя касательная касается окружностей Ω и ω соответственно в точках A и B . Прямая ℓ проходит через точку B , вторично пересекает окружность ω в точке C , а также пересекает Ω в точках D и E (точка D расположена между C и E). Общая касательная окружностей, проходящая через точку F , пересекает прямые AB и BE в точках P и H соответственно (точка F лежит между точками P и H). Известно, что $BC = 42$, $DH = HC = 4$. Найдите длину отрезка HP и радиусы обеих окружностей.
- (Ломоносов 11.4) На стороне AC треугольника ABC взяты точки E и K , причём точка E лежит между точками A и K и $AE : EK : KC = 3 : 5 : 4$. Медиана AD пересекает отрезки BE и BK в точках L и M соответственно. Найдите отношение площадей треугольников BLM и ABC .
- (Ломоносов 11.4) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Касательные к этой окружности, проведённые в точках A и C , пересекаются на прямой BD . Найдите сторону AD , если $AB = 2$ и $BC : CD = 4 : 5$.
- (Высшая проба 11.4) Точки P и Q лежат соответственно на сторонах BC и CD квадрата $ABCD$. Прямые AP и AQ пересекают BD в точках M и N соответственно, а прямые PN и QM пересекаются в точке H . Докажите, что $AH \perp PQ$ тогда и только тогда, когда точки P, Q, M, N лежат на одной окружности.
- (Высшая проба 11.4) Через вершины треугольника ABC проведены три параллельные прямые a, b, c соответственно, не параллельные сторонам треугольника. Пусть A_0, B_0, C_0 - середины сторон BC, CA, AB . Пусть A_1, B_1, C_1 - точки пересечения пар прямых a и B_0C_0, b и C_0A_0, c и A_0B_0 соответственно. Докажите, что прямые A_0A_1, B_0B_1 и C_0C_1 пересекаются в одной точке.
- (ПВГ 10-11.4) В окружности радиуса $5\sqrt{2}$ проведены взаимно перпендикулярные хорды, которые точкой пересечения делятся в отношении $6 : 1$ и $2 : 3$. Найдите расстояние от центра окружности до точки пересечения хорд.
- (Курчатов 10.5) Точка H - ортоцентр остроугольного треугольника ABC . Точка G такова, что четырёхугольник $ABGH$ - параллелограмм. Пусть I - такая точка на прямой GH , что AC делит HI пополам. Прямая AC пересекает описанную окружность треугольника GCI в точках C и J . Докажите, что $IJ = AH$.
- (ПВГ 10-11.4) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle CAD = \angle CDB$ и $\angle BAD = \angle CDA = 60^\circ$.
 - Можно ли в четырёхугольник $ABCD$ вписать окружность?
 - Найдите минимум отношения стороны BC к стороне AD .
- (Физтех 11.6) а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй - точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
- (Физтех 11.6) Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O . Окружность, проходящая через точки A, O и C , пересекает отрезок BC в точке P . Касательные к ω , проведённые через точки A и C , пересекаются в точке T . Отрезок TP пересекает сторону AC в точке K . Известно, что площади треугольников APK и CPK равны соответственно 6 и 4.
 - Найдите площадь треугольника ABC .
 - Пусть дополнительно известно, что $\angle ABC = \arctg \frac{7}{5}$. Найдите AC .