

Логарифмы и степени. Перечневые олимпиады

1. ОММО. 2018.1. Докажите неравенство

$$\log_{2015} 2017 > \frac{\log_{2015} 1 + \log_{2015} 2 + \dots + \log_{2015} 2016}{2016}.$$

2. Физтех. 2014.1. Решите уравнение

$$\log_{x^2-2x} (2 - 3^{4x-x^2}) = \log_{6-x} (2 - 3^{4x-x^2})$$

3. Физтех. 2016.1. Решите неравенство

$$\log_{\frac{x^2-3}{6x-12}} \frac{(x^2-3)(6x-12)}{25} \geq 1$$

4. Физтех. 2018.1. Найдите все значения x , при каждом из которых одно из трёх данных чисел равно сумме двух остальных.

$$\log_{x^2} (x^2 - 10x + 21), \quad \log_{x^2} \frac{x^2}{x-7} \quad \text{и} \quad \log_{x^2} \frac{x^2}{x-3}$$

5. Физтех. 2015.2. Решите уравнение

$$\left(\frac{x}{243}\right)^{\log_2 \frac{9x}{4}} = \frac{729}{x^4}$$

6. Физтех. 2017.2. Решите неравенство

$$x^{\log_3 x} - 2 \leq (\sqrt[3]{3})^{\log_{\sqrt{3}}^2 x} - 2 \cdot x^{\log_3 \sqrt[3]{x}}$$

7. ПВГ 2019.2. Решите неравенство

$$\sqrt{4x+1-12\sqrt{x-2}} + \sqrt{4x+8-16\sqrt{x-2}} \leq \log_{1/4} \left(x - \frac{17}{4}\right).$$

8. Ломоносов. 2013.3 Решите неравенство

$$\log_{x^2+3x+2} (x-5)^2 \cdot \log_{-x^2+4x+5} (4-x)^3 \leq 0$$

9. ПВГ. 2017.3 Решите неравенство

$$(\pi-3)^{\ln(x^2-2x)} \leq (2-x)^{\ln(\pi-3)}.$$

10. Ломоносов 2015.4. Найдите наибольшее значение $x+y$, если числа x и y удовлетворяют неравенству

$$\log_{\frac{x^2+y^2}{2}} y \geq 1.$$

11. Ломоносов 2014.4. Найдите все пары (a, b) , при которых множество решений неравенства совпадает с промежутком $(1; 2)$

$$\log_{2014} (2x+a) > x^2 - 2x - b.$$

12. ПВГ. 2015.3. Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{9}{4}; 3]$

$$\log_2 |\operatorname{tg} \pi x| + \log_4 \frac{\cos \pi x}{2 \cos \pi x + \sin \pi x} = 0.$$

13. Ломоносов.2016.5. Найдите все решения неравенства

$$\left(\log_{\frac{\pi}{6}}(2x-5) - \log_{\frac{\pi}{6}}(7-2x)\right) \left(\cos\left(x + \frac{7}{4}\right) - \cos(2x-1)\right) (|x-4| - |2x-5|) \geq 0$$

14. Ломоносов.2016.6. Найдите произведение всех значений x , при каждом из которых

$$(\sqrt{4-\sqrt{11}})^{x^2-9x+11}, \quad 2^{x^2-9x+11}, \quad (\sqrt{4+\sqrt{11}})^{x^2-9x+11}$$

— арифметическая прогрессия.

15. ОММО. 2017.8. При каких значениях параметра a уравнение имеет ровно три решения

$$4^{|x-a|} \log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+4) + 2^{x^2-2x} \log_{\sqrt{3}}(2|x-a|+3) = 0?$$

16. ОММО. 2019.8. При каких значениях параметра a уравнение имеет два различных корня, сумма квадратов которых больше 4

$$\log_2(2x^2 + (2a+1)x - 2a) - 2\log_4(x^2 + 3ax + 2a^2) = 0?$$

17. ОММО. 2015.8. При каких значениях параметра a уравнение имеет ровно одно решение

$$\ln(x-2a) - 3(x-2a)^2 + 2a = 0?$$

18. ПВГ 2018.5. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение имеет ровно три различных корня

$$16^x - 6 \cdot 8^x + 8 \cdot 4^x + (2-2a) \cdot 2^x - a^2 + 2a - 1 = 0.$$

19. ПВГ 2016.5. При каких значениях a и b неравенств выполняется для всех действительных x ?

$$b < 16^{\frac{2x-1}{4x^2-4x+5}} \leq a$$