# *Готовимся к ММО*

1. (1) Приведите пример числа, делящегося на 2020, в котором каждая из десяти цифр встречается одинаковое количество раз.

2. (2) На экране компьютера напечатано натуральное число, делящееся на 7, а курсор находится впромежутке между некоторыми двумя его соседними цифрами. Докажите, что существует такая цифра, что, если её впечатать в этот промежуток любое число раз, то все получившиеся числа также будут делиться на 7.

3. (2) Существует ли такая непериодическая функция $f(x)$, определённая на всей числовой прямой, что при любом $x$ выполнено равенство

$$f(x+1) = f(x+1)f(x) + 1$$

4. (2) Найдите все пары простых чисел $p$ и $q$, обладающие следующим свойством: $7p + 1$ делится на $q$, а $7q + 1$ делится на $p$.

5. (3) Существуют ли такое натуральное $n$ и такой многочлен $P(x)$ степени $n$, имеющий $n$ различных действительных корней, что при всех действительных $x$ выполнено равенство
**a)** $P(x)P(x+1) = P(x^2)$;
**b)** $P(x)P(x+1) = P(x^2+1)$?

6. (4) Три велосипедиста ездят в одном направлении по круглому треку длиной 300 метров. Каждый из них движется со своей постоянной скоростью, все скорости различны. Фотограф сможет сделать удачный снимок велосипедистов, если все они окажутся на каком-либо участке трека длиной $d$ метров. При каком наименьшем $d$ фотограф рано или поздно заведомо сможет сделать удачный снимок?

7. (4) Можно ли представить число $11^{2018}$ в виде суммы кубов двух натуральных чисел?

8. (4) Из шахматной доски вырезали 10 клеток. Известно, что среди вырезанных клеток есть как черные, так и белые. Какое наибольшее количество двухклеточных прямоугольников можно после этого гарантированно вырезать из этой доски?

9. (4) На собрание пришло $n$ человек ($n > 1$). Оказалось, что у любых двух из них есть среди собравшихся ровно два других общих знакомых.
**а)** Докажите, что каждый из них знаком с одинаковым числом людей на этом собрании.
**б)** Покажите, что $n$ может быть больше 4.

10. (5) Для $n = 1, 2, 3$ будем называть числом $n$-го типа любое число, которое либо равно 0, либо входит в бесконечную геометрическую прогрессию $1, (n+2), (n+2)^2, \ldots$, либо является суммой нескольких различных её членов. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы числа первого типа, числа второго типа и числа третьего типа.

11. (6) Про бесконечный набор прямоугольников известно, что в нём для любого числа $S$ найдутся прямоугольники суммарной площади больше $S$.
**a)** Обязательно ли этим набором можно покрыть всю плоскость, если при этом допускаются наложения?
**b)** Тот же вопрос, если дополнительно известно, что все прямоугольники в наборе являются квадратами.


# *Готовимся к ММО*

1. (1) Приведите пример числа, делящегося на 2020, в котором каждая из десяти цифр встречается одинаковое количество раз.

2. (2) На экране компьютера напечатано натуральное число, делящееся на 7, а курсор находится впромежутке между некоторыми двумя его соседними цифрами. Докажите, что существует такая цифра, что, если её впечатать в этот промежуток любое число раз, то все получившиеся числа также будут делиться на 7.

3. (2) Существует ли такая непериодическая функция $f(x)$, определённая на всей числовой прямой, что при любом $x$ выполнено равенство

$$f(x+1) = f(x+1)f(x) + 1$$

4. (2) Найдите все пары простых чисел $p$ и $q$, обладающие следующим свойством: $7p + 1$ делится на $q$, а $7q + 1$ делится на $p$.

5. (3) Существуют ли такое натуральное $n$ и такой многочлен $P(x)$ степени $n$, имеющий $n$ различных действительных корней, что при всех действительных $x$ выполнено равенство
**a)** $P(x)P(x+1) = P(x^2)$;
**b)** $P(x)P(x+1) = P(x^2+1)$?

6. (4) Три велосипедиста ездят в одном направлении по круглому треку длиной 300 метров. Каждый из них движется со своей постоянной скоростью, все скорости различны. Фотограф сможет сделать удачный снимок велосипедистов, если все они окажутся на каком-либо участке трека длиной $d$ метров. При каком наименьшем $d$ фотограф рано или поздно заведомо сможет сделать удачный снимок?

7. (4) Можно ли представить число $11^{2018}$ в виде суммы кубов двух натуральных чисел?

8. (4) Из шахматной доски вырезали 10 клеток. Известно, что среди вырезанных клеток есть как черные, так и белые. Какое наибольшее количество двухклеточных прямоугольников можно после этого гарантированно вырезать из этой доски?

9. (4) На собрание пришло $n$ человек ($n > 1$). Оказалось, что у любых двух из них есть среди собравшихся ровно два других общих знакомых.
**а)** Докажите, что каждый из них знаком с одинаковым числом людей на этом собрании.
**б)** Покажите, что $n$ может быть больше 4.

10. (5) Для $n = 1, 2, 3$ будем называть числом $n$-го типа любое число, которое либо равно 0, либо входит в бесконечную геометрическую прогрессию $1, (n+2), (n+2)^2, \ldots$, либо является суммой нескольких различных её членов. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы числа первого типа, числа второго типа и числа третьего типа.

11. (6) Про бесконечный набор прямоугольников известно, что в нём для любого числа $S$ найдутся прямоугольники суммарной площади больше $S$.
**a)** Обязательно ли этим набором можно покрыть всю плоскость, если при этом допускаются наложения?
**b)** Тот же вопрос, если дополнительно известно, что все прямоугольники в наборе являются квадратами.