**8-я Иранская олимпиада по геометрии**

# Профессионалы (11 класс)

5 ноября 2021 г.

---

**Задания олимпиады запрещается распространять до их публикации на официальном сайте олимпиады: igo-official.com**

---

**Задача 1.** Окружность $\omega$ описана около остроугольного треугольника $ABC$. Точка $D$ — середина стороны $AC$, $E$ — основание высоты, опущенной из $A$ на сторону $BC$, $F$ — точка пересечения прямых $AB$ и $DE$. Точка $H$ на дуге $BC$ окружности $\omega$, не содержащей точку $A$, такова, что $\angle BHE = \angle ABC$. Докажите, что $\angle BHF = 90°$.

**Задача 2.** Окружности $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ пересекаются в точках $A$ и $B$. Прямая, проходящая через точку $A$, вторично пересекает $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ в точках $C$ и $D$ соответственно, причём $A$ лежит между $C$ и $D$. Касательная к $\Gamma_2$ в точке $A$ вторично пересекает $\Gamma_1$ в точке $E$. На $\Gamma_2$ нашлась такая точка $F$, что $F$ и $A$ лежат в разных полуплоскостях относительно прямой $BD$ и $2\angle AFC = \angle ABC$. Докажите, что касательная к $\Gamma_2$ в точке $F$ и прямые $BD$ и $CE$ пересекаются в одной точке.

**Задача 3.** В треугольнике $ABC$ высоты $AD$, $BE$ и $CF$ пересекаются в точке $H$. Прямая, проходящая через $H$ перпендикулярно $EF$, пересекает прямые $EF$, $AB$ и $AC$ в точках $P$, $T$ и $L$ соответственно. Точка $K$ на стороне $BC$ такова, что $BD = KC$. Окружность $\omega$ проходит через точки $H$ и $P$ и касается прямой $AH$. Докажите, что окружность, описанная около треугольника $ATL$, касается $\omega$, причём точка касания лежит на прямой $KH$.

**Задача 4.** На плоскости расположен выпуклый 2021-угольник, никакие три вершины которого не лежат на одной прямой, а никакие четыре вершины не лежат на одной окружности. Докажите, что можно выбрать две вершины многоугольника так, чтобы каждая окружность, проходящая через через них, содержала внутри себя хотя бы 673 другие вершины многоугольника.

**Задача 5.** В треугольник $ABC$ вписана окружность с центром $I$, касающаяся стороны $BC$ в точке $D$. На стороне $BC$ нашлись точки $P$ и $Q$ такие, что $\angle PAB = \angle BCA$ и $\angle QAC = \angle ABC$. Точки $K$ и $L$ — центры окружностей, вписанных в треугольники $ABP$ и $ACQ$ соответственно. Докажите, что прямая $AD$ является прямой Эйлера треугольника $IKL$.
(Прямой Эйлера треугольника называется прямая, проходящая через его центр описанной окружности и ортоцентр.)

Продолжительность олимпиады: 4 часа 30 минут.
За полное решение каждой задачи даётся 8 баллов.