8-я Иранская олимпиада по геометрии

Продолжающие (9–10 классы)

5 ноября 2021 г.

Задания олимпиады запрещается распространять до их публикации на официальном сайте олимпиады: igo-official.com

---

Задача 1. Дан треугольник ABC, в котором $AB = AC$. Точка H — его ортоцентр. Точка E — середина стороны AC, точка D на стороне BC такова, что $3CD = BC$. Докажите, что $BE \perp HD$.

Задача 2. На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ нашлись такие точки E и F соответственно, что $\angle EDC = \angle FBC$ и $\angle ECD = \angle FAD$. Докажите, что $AB \geqslant 2BC$.

Задача 3. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что $AB = BC$, а углы ABD и BCD равны $90°$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке E. На стороне AD выбрана точка F так, что $\frac{AF}{FD} = \frac{CE}{EA}$. Окружность ω с диаметром DF вторично пересекает окружность, описанную около треугольника ABF, в точке K. Точка L — вторая точка пересечения ω и прямой EF. Докажите, что прямая KL проходит через середину отрезка CE.

Задача 4. Около остроугольного неравнобедренного треугольника ABC описана окружность Γ, а в него вписана окружность с центром в точке I. Прямая AI вторично пересекает Γ в точке M. Точка N — середина стороны BC, точка T на Γ такова, что $IN \perp MT$. Прямые TB и TC пересекаются с прямой, проходящей через I перпендикулярно AI, в точках P и Q соответственно. Докажите, что $PB = CQ$.

Задача 5. На стороне CD фиксированного выпуклого пятиугольника $ABCDE$ выбирается переменная точка X. Точки K и L на отрезке AX таковы, что $AB = BK$ и $AE = EL$. Окружности, описанные около треугольников CXK и DXL, вторично пересекаются в точке Y. Докажите, что все прямые XY, полученные при различных положениях точки X, либо проходят через фиксированную точку, либо параллельны друг другу.

Продолжительность олимпиады: 4 часа 30 минут.
За полное решение каждой задачи даётся 8 баллов.