

Геометрические свойства коник

Эллипсом с фокусами в точках F_1 и F_2 называется locus точек X плоскости, для которых $F_1X + F_2X = \text{const}$.

Гиперболой с фокусами в точках F_1 и F_2 называется locus точек X плоскости, для которых $|F_1X - F_2X| = \text{const}$.

Параболой с фокусом в точке F и с директрисой ℓ называется locus точек X плоскости, для которых длина отрезка FX равна расстоянию от точки X до прямой ℓ .

Коника — любая кривая из трёх, перечисленных выше.

0. (Оптическое свойство) Докажите, что касательная к точке A эллипса с фокусами F_1 и F_2 служит биссектрисой внешнего угла F_1AF_2 .
1. Сформулируйте и докажите оптическое свойство **(а)** гиперболы; **(б)** параболы.
2. Касательные в точках A и B эллипса с фокусами F_1 и F_2 к этому эллипсу пересекаются в точке P . Докажите, что F_1P — биссектриса угла AF_1B .
3. (Изогональное свойство) Касательные в точках A и B эллипса с фокусами F_1 и F_2 к этому эллипсу пересекаются в точке P . Докажите, что $\angle APF_1 = \angle F_2PB$. Сформулируйте изогональное свойство в случае гиперболы и параболы.
4. **(а)** В выпуклый многоугольник вписан эллипс с фокусами F_1 и F_2 . Докажите, что точки F_1 и F_2 изогонально сопряжены относительно этого многоугольника. **(б)** Точки F_1 и F_2 лежат внутри выпуклого многоугольника и изогонально сопряжены относительно него. Докажите, что существует эллипс с фокусами F_1 и F_2 , вписанный в многоугольник.
5. Треугольник ABC описан вокруг параболы. **(а)** Докажите, что фокус параболы лежит на окружности (ABC) . **(б)** Докажите, что ортоцентр треугольника ABC лежит на директрисе параболы. **(в)** Известно, что в любые четыре прямые общего положения можно вписать параболу. Какие утверждения про четыре прямые общего положения можно получить в качестве следствий пунктов **(а)** и **(б)**?
6. Две точки A и B плоскости движутся с постоянными скоростями по двум пересекающимся прямым, причём в точку пересечения траекторий точки приезжают одновременно. Докажите, что прямая AB касается фиксированной параболы.
7. Докажите, что угол между касательными к параболе, проведёнными из точки на директрисе этой параболы, равен 90° .
8. Хорда AB эллипса с фокусами F_1 и F_2 проходит через F_1 , хорда CD — через F_2 . Отрезки AC и BD пересекаются в точке Y , прямые AB и CD — в точке X . Докажите, что $\angle F_1XY = \angle YXF_2$.