

Лемма Саваямы и теорема Тебо

1. К окружностям с центрами в точках O_1 и O_2 провели общую внутреннюю касательную A_1A_2 и общую внешнюю касательную B_1B_2 (точки A_1 и B_1 принадлежат окружности с центром O_1). На отрезках A_1A_2 и B_1B_2 как на диаметрах построили окружности ω_1 и ω_2 . Докажите, что
 - (а) прямая O_1O_2 – радикальная ось этих окружностей.
 - (б) точка пересечения A_1B_1 и A_2B_2 лежит на прямой O_1O_2 .
2. (**Лемма Саваямы**) На стороне BC треугольника ABC выбрали произвольную точку X . Окружность ω касается описанной окружности треугольника ABC в точке T , отрезка XB в точке Q , P – точка касания окружности ω и прямой AH . Докажите, что I (центр вписанной окружности треугольника ABC) лежит на прямой QP .
3. (**Теорема Тебо**) На стороне BC треугольника ABC выбрана произвольная точка X . В криволинейные треугольники AHB и AHC вписано по окружности. Докажите, что линия центров этих окружностей содержит центр вписанной окружности треугольника ABC .

Такие окружности называются *окружностями Тебо* для точки X .
4. (а) Докажите, что окружности Тебо касаются тогда и только тогда, когда X – основание биссектрисы треугольника ABC .
(б) Докажите, что окружности Тебо равны тогда и только тогда, когда X – точка касания невписанной окружности треугольника ABC со стороной BC .
5. Невписанная окружность треугольника ABC , соответствующая вершине C , касается продолжения стороны AC в точке P . Рассмотрим окружность ω , касающуюся AC в точке P и прямой, проходящей через B параллельно AC . Докажите, что ω касается описанной окружности треугольника ABC .
6. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что четыре точки: центры вписанных окружностей I_1, I_2 треугольников ABD и ACD , центры невписанных окружностей I_3, I_4 треугольников ABC и BCD , соответствующие вершине C и B соответственно, лежат на одной прямой.
7. К окружностям Тебо проводится общая внешняя касательная, отличная от BC . Она пересекает отрезок AH в точке K . Докажите, что прямая, параллельная BC и проходящая через K , касается вписанной окружности треугольника ABC .