# Разнобой

1. У равносторонних треугольников $ABC$ и $CDE$ вершина $C$ лежит на отрезке $AE$, вершины $B$ и $D$ по одну сторону от этого отрезка. Описанные около треугольников окружности с центрами $O_1$ и $O_2$ повторно пересекаются в точке $F$. Прямая $O_1O_2$ пересекает $AD$ в точке $K$. Докажите, что $AK = BF$.

2. Вписанная окружность треугольника $ABC$ касается его стороны $AC$ в точке $K$. Обозначим центры вписанных окружностей треугольников $ABK$ и $CBK$ через $I$ и $J$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника $BIJ$ лежит на биссектрисе угла $ABC$.

3. Высота из вершины $A$ треугольника $ABC$ пересекает окружность, построенную на $BC$ как на диаметре, в точках $A_1$ и $A_2$. Аналогично определяются точки $B_1$ и $B_2$. Докажите, что $A_1, A_2, B_1$ и $B_2$ лежат на одной окружности.

4. В треугольнике $ABCN$ — середина дуги $ABC$ описанной окружности треугольника, $NP$ и $NT$ — касательные к вписанной окружности. Прямые $BP$ и $BT$ пересекают второй раз описанную окружность треугольника в точках $P_1$ и $T_1$ соответственно. Докажите, что $PP_1 = TT_1$.

5. Докажите, что точки пересечения средних линий треугольника $ABC$ со сторонами треугольника, вершинами которого являются центры вневписанных окружностей, лежат на одной окружности.

6. Окружность, проходящая через вершины $B$ и $D$ четырехугольника $ABCD$, пересекает его стороны $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$ в точках $K$, $L$, $M$ и $N$ соответственно. Окружность, проходящая через точки $K$ и $M$, пересекает прямую $AC$ в точках $P$ и $Q$. Докажите, что точки $L$, $N$, $P$ и $Q$ лежат на одной окружности.

7. К вписанной окружности треугольника $ABC$ проведена касательная, параллельная $BC$. Она пересекает внешнюю биссектрису угла $A$ в точке $X$. Точка $Y$ — середина дуги $BAC$ описанной окружности. Докажите, что угол $XIY$ прямой.

8. Внутри треугольника $ABC$ взяли точку точку $P$. Окружность с центром $A$ и радиусом $AP$ пересекает лучи $AB$ и $AC$ в точках $A_B$ и $A_C$ соответственно. Аналогично определяются точки $B_A, B_C, C_A, C_B$. Найдите все такие точки $P$, для которых точки $A_B, B_A, B_C, C_B, C_A$ и $A_C$ лежат на одной окружности.