

## Линейные функции

Числовая функция  $f$  на плоскости называется *линейной*, если выполнено одно из двух эквивалентных условий:

- Для любых точек  $A, B, C$  и вещественных  $\lambda$  и  $\mu$  таких, что точка  $C$  делит отрезок  $AB$  в отношении  $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\mu}{\lambda}$ , верно равенство

$$f(C) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} f(A) + \frac{\mu}{\lambda + \mu} f(B).$$

- Существуют вещественные числа  $a, b, c$  такие, что для любой точки  $A$  с координатами  $(x, y)$  верно

$$f(A) = ax + by + c.$$

Основные примеры линейных функций:

- $f(X) \equiv \text{const}$ .
  - $f(X)$  — ориентированное расстояние от точки  $X$  до фиксированной прямой  $\ell$ .
  - $f(X)$  — ориентированная площадь треугольника  $XBC$ , где  $B$  и  $C$  — фиксированные точки.
1. **(а)** Докажите, что множеством нулей линейной функции служит прямая, плоскость либо пустое множество.  
**(б)** Докажите, что линейная комбинация линейных функций — вновь линейная функция.
  2. Построив соответствующую линейную функцию, докажите, что основания трёх внешних биссектрис неравнобедренного треугольника лежат на одной прямой.
  3. Дан выпуклый четырёхугольник  $ABCD$ . Лучи  $AB$  и  $DC$  пересекаются в точке  $P$ , лучи  $AD$  и  $BC$  — в точке  $Q$ . Биссектрисы углов  $BAD$  и  $BDC$  пересекаются в точке  $X$ , биссектрисы углов  $ABC$  и  $ADC$  — в точке  $Y$ ; наконец, внешние биссектрисы углов  $APC$  и  $AQC$  пересекаются в точке  $Z$ . Докажите, что точки  $X, Y, Z$  лежат на одной прямой.
  4. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $BB_1$  и  $CC_1$ . С центром в точке  $B$  построена окружность  $\omega_B$  радиуса  $\frac{1}{2}BB_1$ ; с центром в точке  $C$  построена окружность  $\omega_C$  радиуса  $\frac{1}{2}CC_1$ . Прямая  $\ell$  — общая внешняя касательная к окружностям  $\omega_B$  и  $\omega_C$ , не пересекающая треугольник  $ABC$ . Докажите, что инцентр треугольника, образованного прямыми  $AB, AC$  и  $\ell$ , лежит на отрезке  $BC$ .

5. (а) (Прямая Гаусса) Продолжения сторон  $AB$  и  $CD$  выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ , продолжения сторон  $BC$  и  $AD$  — в точке  $F$ . Построив соответствующую линейную функцию, докажите, что середины отрезков  $AC$ ,  $BD$ ,  $EF$  лежат на одной прямой.
- (б) (Теорема Ньютона) Используя построенную линейную функцию, докажите, что в описанном четырёхугольнике центр вписанной окружности лежит на прямой Гаусса этого четырёхугольника.
6. Даны две окружности  $\omega_A$  и  $\omega_B$ , лежащие вне друг друга. Рассматриваются всевозможные пары точек  $A$  и  $B$  такие, что  $A \in \omega_A$ ,  $B \in \omega_B$  и длины отрезков касательных из  $A$  к  $\omega_B$  и из  $B$  к  $\omega_A$  равны. Найдите локус (т. е. геометрическое место) середин всевозможных отрезков  $AB$ .
7. Внешние биссектрисы  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  с наименьшей стороной  $BC$  пересекаются в точке  $I_A$ . На отрезках  $BC_1$ ,  $CB_1$  взяли точки  $X$  и  $Y$  соответственно так, что отрезок  $XY$  проходит через  $I_A$ . Докажите, что отражения прямых  $CX$  и  $BY$  относительно осей  $CI_A$  и  $BI_A$  соответственно пересекаются на прямой  $B_1C_1$ .
8. Точки пересечения медиан треугольников  $A_1A_2A_3$ ,  $B_1B_2B_3$ ,  $C_1C_2C_3$  лежат на одной прямой. Докажите, что 27 треугольников  $A_iB_jC_k$  можно разбить на две группы так, чтобы суммы площадей треугольников в группах были одинаковыми.