

Простой разнобой

1. Точка D на стороне BC остроугольного треугольника ABC такова, что $AB = AD$. Окружность, описанная около треугольника ABD , пересекает сторону AC в точках A и K . Прямая DK пересекает перпендикуляр, опущенный из B на AC , в точке L . Докажите, что $CL = BC$.
2. В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle A = \angle B = 90^\circ$) опущен перпендикуляр AH на боковую сторону CD . Точка E на стороне AB такова, что прямые EC и CD перпендикулярны. Докажите, что прямые BH и DE параллельны.
3. Вписанная в треугольник ABC окружность ω касается сторон AB, BC, AC в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. На продолжении отрезка AA_1 за точку A взята точка D такая, что $AD = AC_1$. Прямые DB_1 и DC_1 пересекают вторично окружность ω в точках B_2 и C_2 . Докажите, что B_2C_2 — диаметр окружности ω .
4. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E и F , причем E лежит между B и F . Диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Прямые AE и DF касаются окружности, описанной около треугольника AOD . Докажите, что они касаются и окружности, описанной около треугольника EOF .
5. Две окружности пересекаются в точках A и B , прямая, проходящая через B пересекает первую окружность в точке C , а вторую — в точке D . Касательные к первой и второй окружности в точках C и D соответственно пересекаются в точке M . Прямая, проходящая через точку пересечения AM и CD параллельно CM пересекает AC в точке K . Докажите, что BK касается второй окружности.
6. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины дуг CAB, ABC, BCA описанной окружности ω треугольника ABC соответственно. Докажите, что точка пересечения касательных к ω , восстановленных в точках B_1, C_1 , равноудалена от A и A_1 .
7. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке K . Оказалось, что точки B, D , а также середины отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Найдите $\angle ADC$.