

Разнобой

1. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ такой, что $\angle ABC = 90^\circ$, $AC = CD$ и $\angle BCA = \angle ACD$. Точка F — середина отрезка AD . Отрезки BF и AC пересекаются в точке L . Докажите, что $BC = CL$.
2. Пусть ABC — остроугольный треугольник с углом $\angle BAC = 60^\circ$, $AB > BC$, I — центр вписанной окружности, H — ортоцентр. Докажите, что $2\angle AHI = 3\angle ABC$.
3. На стороне BC треугольника ABC выбрана произвольная точка D . В треугольники ABD и ACD вписаны окружности с центрами K и L соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников BKD и CLD вторично пересекаются на фиксированной окружности.
4. На отрезке, соединяющем точку C с серединой медианы AM равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$), нашлась такая точка X , что $\angle MXC = 90^\circ$. Докажите, что $\angle AXB = 90^\circ$.
5. Дан параллелограмм $ABCD$ с углом 60° при вершине A . Точка O — центр окружности (ABD) . Прямая AO пересекает биссектрису внешнего угла C в точке K . Найдите отношение AO/OK .
6. Пусть H и M — ортоцентр остроугольного треугольника ABC и середина стороны BC соответственно. Прямая, проходящая через H перпендикулярно HM , пересекает стороны AB и AC в точках P и Q . Докажите, что H — середина PQ .
7. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. На лучах AC и DC отмечены точки P и Q соответственно так, что $AP = AB$ и $DQ = DB$. Докажите, что прямая PQ проходит через отражение вершины B относительно прямой AD .
8. Две неравные окружности с центрами M и N пересекаются в точках P и Q . Касательная к первой окружности, восстановленная в точке P , пересекает касательную в точке Q ко второй окружности в точке X . Докажите, что углы PXQ и MXN имеют общую биссектрису.
9. Дан остроугольный треугольник ABC с описанной окружностью Γ и ортоцентром H . Пусть K — точка на дуге BC окружности Γ , не содержащей A . Пусть L — отражение точки K относительно прямой AB , а M — отражение K относительно прямой BC . Через E обозначим вторую точку пересечения Γ с описанной окружностью треугольника BLM . Докажите, что прямые KH , EM и BC пересекаются в одной точке.