Изогональное сопряжение

1. **(а)** Прямые AP и AQ изогональны относительно угла BAC. Докажите, что проекции P и Q на стороны AB и AC (все 4 точки) лежат на одной окружности.

   (б) Точки P и Q изогонально сопряжены с треугольника ABC. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из этих точек на стороны треугольника, лежат на одной окружности. Где находится центр этой окружности?

   (в) Провернув рассуждения в обратную сторону, докажите что для (почти) каждой точки существует ей изогонально сопряженная.

2. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке P. Точка Q симметрична точке A относительно середины отрезка BC. Докажите, что точки P и Q изогонально сопряжены.

3. Внутри треугольника ABC выбрана точка P такая, что $PB = PC$. Точка Q такова, что она лежит в разных с A полуплоскостях относительно прямой BC и $\angle ABP = \angle BCQ$, $\angle ACP = \angle CBQ$. Докажите, что точки A, P, Q лежат на одной прямой.

4. Про выпуклый четырехугольник $ABCD$ известно, что $\angle A = \angle C \neq 90°$. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки D на прямые AB, BC, AC, и середина отрезка AC лежат на одной окружности.

5. В треугольнике ABC провели высоты AA_0, BB_0, CC_0 . M — произвольная точка, A_1 — точка, симметричная M относительно BC, аналогично определим точки B_1, C_1. Докажите, что прямые A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 пересекаются в одной точке.

6. Про параллелограмм $ABCD$ известно, что $\angle DAC = 90°$. Пусть $H-$ основание перпендикуляра, опущенного из A на DC, P — такая точка на прямой AC, что прямая PD касается описанной окружности треугольника ABD. Докажите, что $\angle PBA = \angle DBH$.

7. Точки P и Q изогональны относительно треугольника ABC. Точка X — проекция P на сторону BC. Окружность с центром X и радиусом XQ пересекает BC в точках A' и A''. Аналогично определили точки B', B'', C', C''. Докажите, что точки A', A'', B', B'', C', C'' лежат на одной окружности

8. Let ABC be a triangle with circumcircle Ω. Suppose P, Q are two points lying in the triangle such that P is the isogonal conjugate of Q with respect to $\triangle ABC$. Denote by D the point of intersection of AP and Ω in which $D \neq A$. OD consecutively cuts BC at M and again cuts Ω at N. Prove that $\angle PMB = \angle QNA$.