Теорема Паскаля

Теорема. На окружности в некотором порядке расположены точки A, B, C, D, E, F. Тогда точки пересечения пар прямых AB и DE, BC и EF, CD и AF лежат на одной прямой.

Точки в условии теоремы не обязательно различны. Например, если совпадают точки A и B, то прямая AB — это касательная к окружности.

1. Даны треугольник ABC и некоторая точка T. Пусть P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из точки T на прямые AB и AC соответственно, а R и S — основания перпендикуляров, опущенных из точки A на прямые TC и TB соответственно. Докажите, что точка пересечения прямых PR и QS лежит на прямой BC.

2. Докажите, что во вписанном четырёхугольнике точки пересечения противоположных сторон и точки пересечения касательных в противоположных вершинах лежат на одной прямой.

3. Внутри треугольника ABC выбрана точка P.
(а) Прямые AP, BP, CP вторично пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что главные диагонали шестиугольника, образованного пересечением треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, пересекаются в одной точке.
(б) Через P провели прямые, параллельные сторонам, до пересечения со сторонами. В трёх образовавшихся параллелограммах провели диагонали, не содержащие точку P. Обозначим через A_1, B_1, C_1 соответствующие точки пересечения этих прямых. Докажите, что если шестиугольник $AC_1BA_1CB_1$ является выпуклым и вписанным, то точка P совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC.

4. В треугольнике ABC биссектрисы углов B и C пересекают стороны AC и AB в точках B_1 и C_1, а описанную окружность — в точках B' и C' соответственно. Прямые B_1C_1 и $B'C'$ пересекаются в точке X.
(а) Докажите, что AX касается описанной окружности треугольника ABC.
(б) Докажите, что прямая, соединяющая X с центром вписанной окружности треугольника ABC, параллельна стороне BC.

5. Окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках X и Y соответственно, а также его описанной окружности. Докажите, что центр вписанной в треугольник ABC окружности лежит на отрезке XY.

6. Хорда CD окружности перпендикулярна ее диаметру AB, а хорда AE делит радиус OC пополам. Докажите, что хорда DE делит пополам хорду BC.

7. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC пересекают прямые AC и AB в точках B_1 и C_1 соответственно. Биссектрисы углов B_1BC и C_1CB пересекаются в точке A'. Аналогично определяются точки B' и C'. Докажите, что точки A', B', C' лежат на прямой, проходящей через центр вписанной окружности треугольника ABC.