Инверсия + симметрия

Рассмотрим для треугольника ABC следующее преобразование φ_B: композицию инверсии с центром B и радиусом $\sqrt{AB \cdot BC}$ и симметрию относительно биссектрисы угла ABC.

1. **(а)** Докажите, что композиция двух таких преобразований есть тождественное преобразование.
   (б) Докажите, что образом центра вписанной окружности при данном преобразовании является центр вневписанной окружности, касающейся отрезка AC.
   (в) Докажите, что образом центра описанной окружности треугольника ABC является точка, симметричная B относительно прямой AC.

2. Окружность вписана в угол ABC треугольника ABC и касается его описанной окружности внутренним образом в точке P. Обозначим ее точки касания со сторонами AB и BC через X и Y; I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Пусть так же вневписанная в угол B окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке Q.
   (а) Докажите, что $\angle ABP = \angle QBC$.
   (б) Докажите, что I лежит на прямой XY.

3. Углы AOB и COD совмещаются поворотом так, что луч OA совмещается с лучом OC, а луч OB — с OD. В них вписаны окружности, пересекающиеся в точках E и F. Доказать, что углы AOE и DOF равны.

4. Пусть Ω — описанная окружность треугольника ABC. Окружность с центром в точке O касается отрезка BC в точке P и дуги BC окружности Ω, не содержащей точку A, в точке Q. Докажите, что, если $\angle BAO = \angle CAO$, то $\angle BAP = \angle CAQ$.

5. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD (точка D лежит на отрезке AC). Прямая BD пересекает окружность Ω, описанную около треугольника ABC , в точках B и E. Окружность ω, построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность Ω в точках E и F. Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD, содержит медиану треугольника ABC.

6. Дан треугольник ABC ($BC < AC$). Биссектриса угла C пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке P . Пусть M — точка пересечения серединного перпендикуляра к AC с внешней биссектрисой угла BCA. Докажите, что середина отрезка BC лежит на описанной окружности треугольника CPM.

7. В описанной окружности Ω треугольника ABC проведена хорда XY параллельная BC и располагающаяся между точкой A и прямой BC. Окружности ω_1 и ω_2 касаются хорды XY, окружности Ω и отрезков AB и AC соответственно, причем расположены они между прямыми XY и BC. Докажите, что общие внутренние касательные к ω_1 и ω_2 пересекаются на биссектрисе угла BAC.