Композиция гомотетий

Теорема. (*О трёх центрах гомотетии*) Если композицией трёх гомотетии является тождественное преобразование плоскости, то их центры лежат на одной прямой.

1. На плоскости нарисованы три непересекающихся неравных круга. Для каждой пары кругов отметили две точки пересечения общих касательных: одну — внешних, вторую — внутренних. **(а)** (*Теорема о трёх колпаках*) Докажите, что точки пересечения внешних общих касательных лежат на одной прямой. **(б)** Докажите, что если центры кругов не лежат на одной прямой, то все шесть отмеченных точек служат вершинами *четырёхсторонника*, т. е. лежат по три на четырёх прямых.

2. На плоскости зафиксированы две неравные окружности α и β. Произвольная окружность ω касается их внутренним образом в точках A_ω и B_ω соответственно. Докажите, что все прямые $A_\omega B_\omega$ проходят через одну точку, не зависящую от выбора ω.

3. На продолжении стороны CD трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) за точку D отмечена точка P, точка M — середина AD. Прямые PM и AC пересекаются в точке Q, PB и AD — в точке X, а BQ и AD — в точке Y. Докажите, что M — середина XY.

4. Продолжения сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точках P и Q. На сторонах четырехугольника выбрали по точке так, что получился параллелограмм, причем одна пара его сторон параллельна PQ. Докажите, что центр параллелограмма лежит на одной из диагоналей четырёхугольника $ABCD$.

5. Внутри треугольника ABC расположены три непересекающихся круга: ω_A, ω_B, ω_C. Каждый из них касается двух соответственных сторон треугольника. Круг ω касается внешним образом их всех в точках A', B', C' соответственно. Докажите, что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

6. В треугольнике ABC на стороне AB отметили точку D. Пусть ω_1 и Ω_1, ω_2 и Ω_2 — соответственно вписанные и вневписанные (касающиеся AB) окружности треугольников ACD и BCD. Докажите, что общие внешние касательные к ω_1 и ω_2, Ω_1 и Ω_2 пересекаются на прямой AB.

7. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB, DC пересекаются в точке P, а лучи AD, BC — в точке Q. Из точек P и Q внутрь углов APD и AQB проведено ещё по два луча, разбивающие четырёхугольник $ABCD$ на девять частей. Известно, что в части, примыкающие к вершинам B, C, D, можно вписать окружность. Докажите, что в часть, примыкающую к вершине A, также можно вписать окружность.

8. Дан описанный четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что точка пересечения диагоналей, центр вписанной окружности треугольника ABC и центр вневписанной окружности треугольника CDA , касающейся стороны AC, лежат на одной прямой.

9. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполнено $AB + AD = CB + CD$. В треугольники ABC, CDA вписаны окружности с центрами I_1, I_2. Докажите, что прямые AC, BD, $I_1 I_2$ пересекаются в одной точке.