

Инверсия

Определение. Инверсией относительно окружности ω с центром в точке O и радиусом R называется преобразование плоскости, переводящее точку X в точку X' на луче OX такую, что $OX \cdot OX' = R^2$.

- Докажите, что:
 - прямая, проходящая через центр инверсии, переходит в прямую;
 - окружность, проходящая через центр инверсии, переходит в прямую;
 - прямая, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность;
 - окружность, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность.
- Докажите, что при инверсии касающиеся окружности (прямая и окружность) переходят в касающиеся окружности, или в касающиеся окружность и прямую, или в пару параллельных прямых
- При инверсии с центром O точки A и B переходят в точки A' и B' соответственно. Докажите, что $A'B' = \frac{R^2}{OA \cdot OB} AB$
 - Неравенство Птолемея.* Докажите, что для любых точек A, B, C, D верно неравенство $AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot BD$. В каком случае оно обращается в равенство?
- Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности.
- Лемма Архимеда.** Пусть окружность ω касается изнутри окружности Ω и её хорды PQ в точках A и B соответственно. Тогда прямая AB делит дугу PQ , не содержащую точку касания, пополам.
- Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A_1 и B_1 , окружности ω_2 и ω_3 — в точках A_2 и B_2 , окружности ω_3 и ω_4 — в точках A_3 и B_3 , окружности ω_4 и ω_1 — в точках A_4 и B_4 . Докажите, что если точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат на одной окружности, то точки B_1, B_2, B_3, B_4 лежат на одной окружности.
- В полуокружность ω , стягиваемую диаметром PQ , вписана окружность, касающаяся диаметра в точке C . Точки A на ω и B на отрезке PQ таковы, что AB касается окружности и $AB \perp PQ$. Докажите, что CA — биссектриса угла BAP .
- В сегмент окружности ω вписываются всевозможные пары касающихся окружностей. Для каждой пары окружностей через точку их касания проводится общая касательная. Докажите, что все получившиеся прямые проходят через середину дуги ω .
- Докажите, что в неравнобедренном треугольнике одна из окружностей, касающихся вписанной и описанной окружностей внутренним, а одной из вневписанных внешним образом, проходит через вершину треугольника.