

Угадай точку

1. Из центров вневписанных окружностей провели прямые, перпендикулярные соответствующим сторонам. Докажите, что эти три прямых пересекаются в одной точке.
2. На равных сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N так, что $AC = CM$ и $MN = NB$. Высота треугольника, проведенная из вершины B , пересекает отрезок CM в точке H . Докажите, что NH — биссектриса угла MNC .
3. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Через середины сторон AB и AD проведены прямые, соответственно перпендикулярные противоположным сторонам CD и CB . Докажите, что эти прямые пересекаются на прямой AC .
4. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли соответственно точки M и K так, что $AM = AC = CK$. Отрезки AK и CM пересеклись в точке E . Докажите, что перпендикуляр, опущенный из точки E на сторону AC , проходит через центр вписанной в треугольник окружности.
5. В неравностороннем треугольнике ABC через точку, делящую ломаную BAC пополам, провели прямую ℓ_A , параллельную биссектрисе угла BAC . Аналогично определены прямые ℓ_B и ℓ_C . Докажите, что ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C пересекаются в одной точке.
6. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O . Касательная к ω , восстановленная в вершине B , пересекает, прямую, проходящую через O и параллельную AB , в точке P . Касательная к ω , восстановленная в вершине C , пересекает, прямую, проходящую через O и параллельную AC , в точке Q . Докажите, что прямая PQ касается ω .
7. В треугольнике ABC угол A равен 60° . Пусть BB_1 и CC_1 — биссектрисы этого треугольника. Докажите, что точка, симметричная вершине A относительно прямой B_1C_1 , лежит на стороне BC .
8. На стороне AC взяли произвольную точку D . В треугольники ABD и CBD вписаны окружности с центрами I_1 и I_2 соответственно. Докажите, что окружности (I_1I_2) проходят через фиксированную точку, не зависящую от D .
9. **IMO 2020.1.** Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ нашлась точка P , такая что выполняются равенства

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC$$

Докажите, что следующие три прямые пересекаются в одной точке: внутренние биссектрисы углов $\angle ADP$ и $\angle PCB$ и серединный перпендикуляр к отрезку AB .