Геометрия масс

Материальной точкой называется пара (A, m), где A — точка на плоскости, а m — некоторое число. Число m называется массой этой материальной точки (заметьте, что m не обязательно положительно).

Центром масс системы материальных точек $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \ldots, (A_n, m_n)$ называется такая точка Z, что $m_1\overrightarrow{ZA_1} + m_2\overrightarrow{ZA_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{ZA_n} = \vec{0}$.

Основная теорема. Пусть система материальных точек $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \ldots, (A_n, m_n)$ такова, что $m_1 + m_2 + \ldots + m_n \neq 0$. Тогда центр масс этой системы существует и единственен, причем для любой точки O верно следующее равенство:

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{OA_n}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

1. **Правило рычага.** Центр масс Z двух материальных точек (A, m_1) и (B, m_2) с неотрицательными массами расположен на отрезке AB, причем $BZ : AZ = m_1 : m_2$. Что произойдет, если убрать условие неотрицательности масс?

2. **Правило группировки.** Пусть O — центр масс первых k материальных точек системы $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \ldots, (A_n, m_n)$. Тогда центр масс всей системы совпадает с центром масс системы $(O, m_1 + \ldots + m_k), (A_{k+1}, m_{k+1}), \ldots, (A_n, m_n)$.

3. Дан треугольник со сторонами a, b, c и углами α, β, γ. Какие массы надо поместить в вершины этого треугольника, чтобы центр масс полученной системы материальных точек оказался **(а)** в точке пересечения медиан; **(б)** в точке пересечения биссектрис; **(в)** в точке пересечения высот; **(г)** в центре описанной окружности?

4. На сторонах AB, BC, CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки K, L, M и N соответственно, причем $AK : KB = DM : MC = \alpha$ и $BL : LC = AN : ND = \beta$. Пусть P — точка пересечения отрезков KM и LN. Докажите, что $NP : PL = \alpha$ и $KP : PM = \beta$.

5. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1, причем отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P. Пусть l_a, l_b, l_c — прямые, соединяющие середины отрезков BC и B_1C_1, CA и C_1A_1, AB и A_1B_1. Докажите, что прямые l_a, l_b и l_c пересекаются в одной точке, причем эта точка лежит на отрезке PM, где M — центр масс треугольника ABC.

6. Внутри треугольника ABC отмечена точка X. Её отразили относительно середин сторон BC, CA, AB получили точки X_A, X_B, X_C соответственно. Докажите, что прямые AX_A, BX_B, CX_C пересекаются в одной точке.

7. *Прямая Нагеля.* Докажите, что точка пересечения биссектрис I, точка пересечения M и точка Нагеля N треугольника ABC лежат на одной прямой, причем $NM = 2MI$.

8. *Теорема Ньютона.* Докажите, что в описанном четырёхугольнике центр вписанной окружности лежит на отрезке, соединяющем середины его диагоналей.

9. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. A', B', C', D' — ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB, ABC. Докажите, что в четырехугольниках $ABCD$ и $A'B'C'D'$ соответствующие диагонали делятся точками пересечения в одном и том же отношении.

10. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. Точки M и N — середины диагоналей AC и BD. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ вписанный тогда и только тогда, когда $IM : AC = IN : BD$.