Еще направленных углов

Обозначим касательную к окружности, восстановленную в точке X этой окружности, за XX.

Как мы уже знаем, для любых четырех точек на одной окружности выполнено, что $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle ADC$. В частности, $\measuredangle AAC \equiv \measuredangle ABC$ *(теорема об угле между хордой и касательной)* и $\measuredangle AAB \equiv \measuredangle ABB$.

1. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. **(а)** Биссектрисы внутренних углов при вершинах A и B, B и C, C и D, D и A пересекаются в точках K, L, M, N соответственно. Докажите, что точки K, L, M, N лежат на одной окружности. **(б)** Докажите, что утверждение пункта **(а)** остается верным, если две или все четыре биссектрисы внутренних углов четырехугольника заменить на биссектрисы внешних.

2. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Точка D — основание биссектрисы **(а)** внутреннего; **(б)** внешнего угла при вершине A. Окружность, проходящая через точки A и D, касается прямой BC и второй раз пересекает прямые AB, AC в точках M и N соответственно. Докажите, что $MN \parallel BC$.

3. Точки O и I — центры соответственно описанной и вписанной окружностей равнобедренного треугольника $ABC(AB = BC)$. Окружности, описанные около треугольников ABC и OIA, пересекаются в точках A и D. Докажите, что прямая BD касается окружности, описанной около треугольника OIA.

4. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Касательная в точке A к окружности ω_1 второй пересекает ω_2 в точке P; касательная в точке B к окружности ω_2 второй пересекает ω_1 в точке Q. Прямые PB и QA вторично пересекают окружности ω_1 и ω_2 в точках R и S соответственно. Докажите, что $PRQS$ — параллелограмм.

5. Окружности ω_B, ω_C касаются описанной окружности треугольника ABC в точках B, C соответственно. Прямые AB, AC вторично пересекают ω_B, ω_C в точках D, E соответственно. Докажите, что если прямая DE касается ω_B, то она касается ω_C.

6. На окружности с центром O выбраны четыре точки A, B, C, D. Прямые AB и CD пересекаются в точке P. Окружности APD и BCP повторно пересекаются в точке Q. Докажите, что четверки точек $AQCO$ и $BQDO$ вписаны.

7. Даны четыре точки A, B, C, D общего положения. Докажите, что окружности Эйлера треугольников ABC, ABD, ACD и BCD имеют общую точку.

8. Прямую ℓ отразили от сторон AB, BC, CA треугольника ABC и получили прямые ℓ_C, ℓ_A, ℓ_B, которые образуют треугольник $A'B'C'$. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника $A'B'C'$ лежит на (ABC).