

Отношение синусов

Лемма об отношении синусов. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка X . Тогда верно соотношение

$$\frac{\sin \angle BAX}{\sin \angle XAC} = \frac{BX}{XC} \cdot \frac{AB}{AC}.$$

1. (**Тригонометрическая теорема Чевы**) На сторонах BC , CA , AB треугольника ABC отмечены точки A_1 , B_1 , C_1 . Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin \angle BAA_1}{\sin \angle A_1AC} \cdot \frac{\sin \angle CBB_1}{\sin \angle B_1BA} \cdot \frac{\sin \angle ACC_1}{\sin \angle C_1CB} = 1.$$

2. Выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Докажите, что его диагонали AD , BE , CF пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$.
3. В остроугольном неравностороннем треугольнике ABC с центром описанной окружности O проведены высоты BH_B и CH_C . Точки X и Y симметричны точкам H_B и H_C относительно середин сторон AC и AB соответственно. Докажите, что прямая AO делит отрезок XY пополам.
4. На маленькой дуге AB описанной окружности квадрата $ABCD$ взяли произвольную точку P . Отметим $CP \cap BD = R$ и $DP \cap AC = S$. Докажите, что треугольники ARB и DSR имеют равные площади.
5. На сторонах AB , BC параллелограмма $ABCD$ отметили такие точки X и Y , что $AX = CY$. Докажите, что точка пересечения AY и CX лежит на биссектрисе угла D .
6. Чевяны AA_1 , BB_1 , CC_1 треугольника ABC пересекаются в одной точке. Окружность ω_A касается стороны BC в точке A_1 и меньшей дуги BC окружности (ABC) в точке A' . Аналогично определяются точки B' и C' . Докажите, что прямые AA' , BB' , CC' пересекаются в одной точке.
7. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром I касается сторон BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Точка M — середина BC . Докажите, что прямые B_1C_1 , AM и IA_1 пересекаются в одной точке.
8. Чевяны AA_1 , BB_1 , CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке P . Окружности (BPC_1) и (CPB_1) пересекаются второй раз в точке M_A . Аналогично определяются точки M_B и M_C . Докажите, что прямые AM_A , BM_B и CM_C пересекаются в одной точке.
9. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника параллельны. Докажите, что отрезки, соединяющие середины его противоположных сторон, пересекаются в одной точке.