Разнобой

1. В остроугольном треугольнике ABC $AB < AC$. Пусть M — середина AB, H — основание высоты из вершины A. На стороне AC отметили такую точку Q, что $\angle ABQ = \angle BCA$. Докажите, что описанные окружности треугольников ABQ и BHM касаются.

2. Окружность Γ, проходящая через вершину A и центр O описанной окружности треугольника ABC, пересекает стороны AC, AB и его описанную окружность в точках F, E и P соответственно. Докажите, что точка, симметричная P относительно EF, лежит на BC.

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что треугольник, вершинами которого являются ортоцентры треугольников AB_1C_1, BC_1A_1 и CA_1B_1, равен треугольнику $A_1B_1C_1$.

4. В треугольнике ABC отметили ортоцентр H, центр вписанной окружности I, а также провели высоту AD. Окружность (HID) пересекает AI в точке F. Отметили точку E такую, что $BICE$ — параллелограмм. Докажите, что точки H, F, E лежат на одной прямой.

5. В треугольнике ABC отметили ортоцентр H. На стороне BC отметили середину A_0, а также точки A_1 и A_2 такие, что $A_0A_1 = A_0A_2 = A_0H$. Аналогично отметили точки B_1, B_2 и C_1, C_2. Докажите, что точки $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежат на одной окружности.

6. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ отметили середины M и N сторон AD и BC. Также отметили точки $F = AD \cap BC$, $X = MN \cap AB$, $Y = MN \cap DC$, $P = AB \cap DC$. Докажите, что окружности (FMN) и (PXY) касаются.

7. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω. Пусть PQ — диаметр ω, перпендикулярный прямой AC. Известно, что прямые BP и DQ пересекаются в точке X, а прямые BQ и DP — в точке Y. Докажите, что точки X и Y лежат на прямой AC.

8. В прямоугольном треугольнике ABC точка C_0 — середина гипотенузы AB, AA_1, BB_1 — биссектрисы, I — центр вписанной окружности. Докажите, что прямые C_0I и A_1B_1 пересекаются на высоте из вершины C.