Направленные углы

Направленным углом $\measuredangle(\ell_1, \ell_2)$ между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 называют угол, на который надо повернуть прямую ℓ_1 против часовой стрелки, чтобы получить прямую, параллельную ℓ_2. Значение направленного угла определено с точностью до 180°. Определим $\measuredangle ABC$ как $\measuredangle(AB, BC)$. Основные свойства направленных углов:

- $\measuredangle(\ell_1, \ell_2) \equiv -\measuredangle(\ell_2, \ell_1)$; $\measuredangle ABC \equiv -\measuredangle CBA$;
- $\measuredangle(\ell_1, \ell_2) + \measuredangle(\ell_2, \ell_3) \equiv \measuredangle(\ell_1, \ell_3)$; $\measuredangle AOB + \measuredangle BOC = \measuredangle AOC$;
- $\measuredangle(\ell_1, \ell_2) \equiv 0° \iff \ell_1 \parallel \ell_2$; $\measuredangle ABC \equiv 0° \iff A, B, C$ лежат на одной прямой;
- $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle ADC \iff A, B, C, D$ лежат на одной окружности или прямой.
- $\measuredangle ABC = -\measuredangle ACB \iff AB = AC$ или A, B, C на одной прямой.

Через (XYZ) обозначается описанная окружность треугольника XYZ.

1. Дан треугольник ABC; точки A', B', C' лежат на прямых BC, CA, AB соответственно. Докажите, что окружности $(A'BC')$, $(B'CA')$, $(C'AB')$ имеют общую точку.

2. Две окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно пересекаются в точках A и B. Окружность (O_1AO_2) второй раз пересекает ω_2 в точке C. Докажите, что точки O_1, B, C лежат на одной прямой.

3. На стороне BC треугольника ABC отмечены точки P и Q так, что $\angle BAP = \angle CAQ$. Докажите, что центры окружностей (ABP), (ABQ),(ACP), (ACQ) лежат на одной окружности.

4. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A_1 и B_1, окружности ω_2 и ω_3 — в точках A_2 и B_2, окружности ω_3 и ω_4 — в точках A_3 и B_3, окружности ω_4 и ω_1 — в точках A_4 и B_4. Докажите, что если точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат на одной окружности или прямой, то точки B_1, B_2, B_3, B_4 лежат на одной окружности или прямой.

5. **Точка Микеля.** Четыре прямые общего положения образуют четыре треугольника. Докажите, что описанные окружности этих треугольников имеют общую точку.

6. В треугольнике ABC отметили основания высот A_1, B_1, C_1 на сторонах BC, AC, AB соответственно. Отметим точку пересечения P прямой B_1C_1 и (ABC). Прямые BP и A_1C_1 пересекаются в точке Q. Докажите, что $AP = AQ$.

7. Треугольник ABC ($\angle C \neq 90°$) вписан в окружность с центром O, на окружности отмечена точка D. Перпендикуляр, опущенный из D на BC, пересекает прямую AC в точке E. Докажите, что центр окружности (AED) лежит на окружности (AOB).

8. Внутри вписанного четырёхугольника $ABCD$ нашлась такая точка X, что выполнено равенство $\angle XAB = \angle XBC = \angle XCD = \angle XDA$. Продолжения пар противоположных сторон AB и CD, BC и DA пересекаются в точках P и Q соответственно. Докажите, что $\angle PXQ$ равен углу между диагоналями BD и AC.

9. В треугольнике ABC отметили ортоцентр H. На окружности (ABC), на дуге BC, не содержащей точки A отметили точку K. Точки L и M симметричны K относительно сторон AB и BC соответственно. Окружности (BLM) и (ABC) повторно пересекаются в точке E. Докажите, что прямые KH, EM и BC пересекаются в одной точке.