

Геометрический разнобой

1. Дана трапеция $ABCD$ с основанием AD . Центр описанной окружности треугольника ABC лежит на прямой BD . Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABD лежит на прямой AC .
2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C острые и равные между собой, а угол ABD — прямой. Точка M — середина отрезка AC . Докажите, что прямые MB и CD перпендикулярны.
3. В остроугольном треугольнике ABC на сторонах AB и AC выбраны точки X и Y так, что $AX = AY$ и отрезок XY проходит через ортоцентр треугольника ABC . Касательные к описанной окружности треугольника AXY в точках X и Y пересекаются в точке P . Докажите, пожалуйста, что точки A, B, C и P лежат на одной окружности.
4. На сторонах AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$ как на диаметрах во внешнюю часть построили полуокружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и ω_4 , соответственно. Прямая l_1 , параллельная BC , пересекает полуокружности ω_1 и ω_3 в точках X и Z , а отрезки AB и CD в точках P и R . Прямая l_2 , параллельная AB , пересекает полуокружности ω_2 и ω_4 в точках Y и W , а отрезки BC и DA в точках Q и S . Докажите, что если верно равенство $XP \cdot RZ = YQ \cdot SW$, то четырёхугольник $PQRS$ — вписанный.
5. На стороне AB треугольника ABC отмечены точки X и Y , на сторонах AC и BC — точки Z и T , соответственно. Оказалось, что $XZ \parallel BC$, $YT \parallel AC$. Прямая TZ пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках D и E . Докажите, что точки X, Y, D и E лежат на одной окружности.
6. Точка O — центр окружности, описанной около четырёхугольника $ABCD$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке P . Точки K, L, M, N — центры вписанных окружностей треугольников AOP, BOP, COP, DOP , соответственно. Докажите, что $KL = MN$.
7. В треугольнике ABC угол A равен 60° , AA', BB', CC' — биссектрисы. Докажите, что $\angle B'A'C' \leq 60^\circ$.
8. В треугольнике ABC с углом A , равным 45° , проведена медиана AM . Прямая b симметрична прямой AM относительно высоты BB_1 , а прямая c симметрична прямой AM относительно высоты CC_1 . Прямые b и c пересеклись в точке X . Докажите, что $AX = BC$.
9. Дан неравносторонний треугольник ABC . Выберем произвольную окружность ω , касающуюся описанной окружности треугольника ABC внутренним образом в точке B и не пересекающую прямую AC . Отметим на ω точки P и Q так, чтобы прямые AP и CQ касались ω , а отрезки AP и CQ пересекались внутри треугольника ABC . Докажите, что такие прямые PQ проходят через фиксированную точку.

10. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть $\omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D$ — окружности, описанные вокруг треугольников B, C, D, A соответственно. Обозначим через X_A произведение степени точки A относительно ω_A на площадь треугольника B, C, D . Аналогично определим X_B, X_C, X_D . Докажите, что $X_A + X_B + X_C + X_D = 0$.