Изгональное сопряжение в четырёхугольнике

Теорема. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечена точка P. Тогда следующие условия эквивалентны:

- $\angle APB + \angle CPD = 180^\circ$.
- Проекции точки P на прямые AB, BC, CD, DA лежат на одной окружности.
- Существует точка, изогонально сопряжённая точке P относительно $ABCD$.
- Существует эллипс с фокусом в вершине P, вписанный в $ABCD$.

1. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC отметили ортоцентр H и центр описанной окружности O. Серединный перпендикуляр к отрезку AH пересекает стороны AB и AC в точках E и F. Докажите, что прямая OA – биссектриса угла EOF.

2. Четырёхугольник $ABCD$ описан вокруг окружности с центром в точке I. На отрезках AI, CI отмечены точки X и Y так, что $2\angle XBY = \angle ABC$. Докажите, что $2\angle XDY = \angle ADC$.

3. Внутри параллелограмма $ABCD$ отметили точку P, такую что $\angle PAD = \angle PCD$. Докажите, что $\angle PBC = \angle PDC$.

4. В описанном четырехугольнике $ABCD$ проведены пересекающиеся в точке P отрезки AM и DN, где точки M и N лежат на стороне BC. В треугольники MNP, APD, ABM и DCN вписаны окружности. Докажите, что их центры лежат на одной окружности.

5. Внутри окружности Ω отмечена точка K. Рассматриваются все хорды AB окружности Ω такие, что $\angle AKB = 90^\circ$. Докажите, что проекции точки K на всевозможные хорды AB лежат на одной окружности.

6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагональ BD не является биссектрисой ни угла ABC, ни угла ADC. Точка P внутри $ABCD$ такова, что $\angle PBA = \angle DBC$ и $\angle PDA = \angle BDC$. Докажите, что $ABCD$ вписан тогда и только тогда, когда $AP = CP$.

7. Диагонали описанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке S. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ASB, BSC, CSD и DSA лежат на одной окружности.