

Парабола и гипербола

Определение. Пусть даны две точки F_1 и F_2 . Тогда *гипербола с фокусами F_1 и F_2* , это ГМТ таких точек X , что $|F_1X - F_2X|$ постоянно.

Ещё определение. Пусть дана точка F и прямая l . Тогда *парабола с фокусом F и директрисой l* это ГМТ таких точек X , что расстояния от X до F и l равны.

1. Угадайте, и докажите оптическое свойство
(а) гиперболы; (б) параболы.
2. Угадайте и докажите изогональное свойство
(а) гиперболы; (б) параболы.
3. Пусть F – фокус коники, из точки P к этой конике провели две касательных, касающихся её в точках X и Y . Докажите, что FP биссектриса XFY если
(а) коника это гипербола; (б) коника это парабола.
4. Докажите, что эллипс и гипербола у которых совпадают фокусы, пересекаются под прямым углом (углом между двумя кривыми называется угол между касательными к ним в данной точке их пересечения).
5. Проекция фокуса параболы на его касательные лежат на прямой, касающейся параболы в ее вершине.
6. Множество таких точек P , из которых парабола видна под прямым углом, есть директриса этой параболы.
7. Пусть вокруг параболы описан треугольник ABC (т. е. парабола касается прямых AB, BC, CA). Тогда фокус этой параболы лежит на описанной окружности треугольника ABC .
8. Ортоцентр треугольника, описанного около параболы, лежит на ее директрисе
9. Парабола вписана в угол. Найдите геометрическое место середин отрезков, отсекаемых сторонами угла на касательных к параболе.