

## Парабола и гипербола

**Определение.** Пусть даны две точки  $F_1$  и  $F_2$ . Тогда *гипербола с фокусами  $F_1$  и  $F_2$* , это ГМТ таких точек  $X$ , что  $|F_1X - F_2X|$  постоянно.

**Ещё определение.** Пусть дана точка  $F$  и прямая  $l$ . Тогда *парабола с фокусом  $F$  и директрисой  $l$*  это ГМТ таких точек  $X$ , что расстояния от  $X$  до  $F$  и  $l$  равны.

1. Угадайте, и докажите оптическое свойство  
(а) гиперболы; (б) параболы.
2. Угадайте и докажите изогональное свойство  
(а) гиперболы; (б) параболы.
3. Пусть  $F$  – фокус коники, из точки  $P$  к этой конике провели две касательных, касающихся её в точках  $X$  и  $Y$ . Докажите, что  $FP$  биссектриса  $XFY$  если  
(а) коника это гипербола; (б) коника это парабола.
4. Докажите, что эллипс и гипербола у которых совпадают фокусы, пересекаются под прямым углом (углом между двумя кривыми называется угол между касательными к ним в данной точке их пересечения).
5. Проекция фокуса параболы на его касательные лежат на прямой, касающейся параболы в ее вершине.
6. Множество таких точек  $P$ , из которых парабола видна под прямым углом, есть директриса этой параболы.
7. Пусть вокруг параболы описан треугольник  $ABC$  (т. е. парабола касается прямых  $AB, BC, CA$ ). Тогда фокус этой параболы лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ .
8. Ортоцентр треугольника, описанного около параболы, лежит на ее директрисе
9. Парабола вписана в угол. Найдите геометрическое место середин отрезков, отсекаемых сторонами угла на касательных к параболе.