

## Геометрия эллипса

**Определение.** Пусть даны две точки  $F_1$  и  $F_2$ . Тогда *эллипс с фокусами  $F_1$  и  $F_2$* , это ГМТ таких точек  $X$ , что  $F_1X + F_2X$  постоянно.

### Свойства эллипса

1. (а) Докажите, что сумма расстояний до фокусов эллипса от любой точки внутри его меньше, а от любой точки снаружи его больше, чем сумма расстояний от точки на границе эллипса.  
(б) **Оптическое свойство эллипса.** Пусть прямая  $l$  касается эллипса в точке  $P$ . Тогда прямая  $l$  – это внешняя биссектриса угла  $F_1PF_2$ .

*Мысль:* из-за предыдущей задачи часто бывает полезно отражать фокусы относительно касательных.

2. Пусть хорда  $PQ$  содержит фокус  $F_1$  эллипса,  $R$  – точка пересечения касательных к эллипсу в точках  $P$  и  $Q$ . Тогда  $R$  – это центр вневписанной окружности треугольника  $F_2PQ$ , а  $F_1$  – это точка касания этой окружности со стороной  $PQ$ .
3. **Изогональное свойство эллипса** Проведем из любой точки  $P$ , лежащей вне эллипса, две касательные к нему. Пусть они касаются эллипса в точках  $X$  и  $Y$ . Тогда углы  $F_1PX$  и  $F_2PY$  равны.
4. В обозначениях задачи 3, докажите, что прямая  $F_1P$  является биссектрисой угла  $XF_1Y$ .

### Задачи

5. Одна окружность лежит внутри другой. Найдите ГМТ центров окружностей, касающихся их обеих.
6. Пусть вокруг эллипса с фокусом  $F$  описан  $2n$ -угольник, стороны которого окрашены попеременно в черный и белый цвета. Докажите, что сумма углов, под которыми из  $F$  видны черные стороны многоугольника, равна  $180^\circ$ .
7. **Изогональное сопряжение в четырёхугольнике.** Пусть внутри четырёхугольника  $ABCD$  нашлись такие точки  $X$ ,  $Y$ , что они изогонально сопряжены относительно углов  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Докажите, что они изогонально сопряжены относительно угла  $D$ .
8. В выпуклый четырёхугольник вписан эллипс, фокусы которого лежат на диагоналях (разных) четырёхугольника. Докажите, что произведения противоположных сторон равны.
9. Дан выпуклый четырёхугольник  $ABCD$ . Обозначим через  $I_A$ ,  $I_B$ ,  $I_C$  и  $I_D$  центры окружностей  $\omega_A$ ,  $\omega_B$ ,  $\omega_C$  и  $\omega_D$ , вписанных в треугольники  $DAB$ ,  $ABC$ ,  $BCD$  и  $CDA$  соответ-

ственно. Оказалось, что  $\angle BI_A A + \angle CI_A I_D = 180^\circ$ . Докажите, что  $\angle BI_B A + \angle CI_B I_D = 180^\circ$ .

10. (а) На всевозможные касательные к эллипсу проецируют его фокусы. Докажите, что все получившиеся точки лежат на одной окружности.
- (б) **Директор эллипса.** Докажите, что все точки, из которых эллипс видно под прямым углом, лежат на одной окружности.