Поляры и полярное соответствие

Определение. *Полярой* точки A относительно окружности ω с центром O называется прямая, получающаяся из окружности, построенной на OA как на диаметре, при инверсии относительно ω. Поляру точки A будем обозначать как $\pi(A)$.

Важный частный случай: что такое поляра точки, лежащей на окружности ω?

Ещё определение. *Полюсом* прямой l относительно окружности ω называется такая точка A, что l – поляра A. Полюс l будем обозначать как $\pi(l)$. Полюс определён только для прямых, не проходящих через центр ω.

Лемма о поляре. Даны две точки P и Q. Тогда $P \in \pi(Q) \Leftrightarrow Q \in \pi(P)$.

Следствие. Если $a = \pi(A)$ и $b = \pi(B)$, то $AB = \pi(a \cap b)$.

Ещё следствие. Пусть точки A, B, C имеют поляры a, b, c соответственно. Тогда "A, B, C лежат на одной прямой" $\Leftrightarrow$ "a, b, c пересекаются в одной точке".

Полярное свойство касательных. Через точку P провели прямую, пересекающую ω в точках X и Y. Тогда касательные к ω в точках X, Y пересекаются на поляре P.

Полярное свойство секущих. Через точку P провели две секущие, пересекающие ω в точках X_1, Y_1 и X_2, Y_2 соответственно. Тогда точка пересечения прямых X_1X_2 и Y_1Y_2 лежит на поляре P. (На самом деле мы уже доказывали это, см. листик про большую картинку и точку Микеля.)

И ещё одно определение. Полярным соответствием относительно окружности ω называется отображение π, которое каждой точке сопоставляет её поляру, а каждой прямой (не проходящей через центр окружности) её полюс. Это отображение сохраняет отношение инцендентности: точка A принадлежит прямой $l \Leftrightarrow$ точка $\pi(l)$ принадлежит прямой $\pi(A)$.

1. Есть окружность и непересекающая ее прямая. Точка движется по прямой, и из нее проводятся две касательные. Точки касания соединяются. Докажите, что все построенные отрезки имеют общую точку.

2. I – центр вписанной окружности треугольника ABC, которая касается сторон AB, BC, CA в точках M, N, P. Пусть PN и AB пересекаются в точке K. Докажите, что $CM \perp IK$.

3. Дана окружность ω и точка P. Как с помощью одной линейки построить
   (а) касательную из P к ω?
   (б) инверсный образ P, если дан также центр окружности?

4. В какую теорему при полярном преобразовании относительно описанной окружности перейдет теорема «медианы треугольника пересекаются в одной точке»?

5. **Описанный четырёхугольник.** Диагонали описанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в P, AB и CD – в R, BC и DA – в Q. K, L, M, N – точки касания сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Прямые KL и MN пересекаются в S, LM и NK – в T.
   (а) Докажите, что Q, R, S, T лежат на одной прямой.
   (б) Докажите, что AC, BD, KM, LN пересекаются в одной точке.

6. **Вписанный и описанный четырехугольник.** Пусть $ABCD$ описан около окружности ω с центром I и вписан в окружность Ω с центром O. Его диагонали пересекаются в точке P.
   (а) O, I, P лежат на одной прямой.
   (б) При фиксированных ω, Ω и меняющихся $ABCD$, точка P постоянна.

7. Точка O не лежит на сторонах и их продолжениях треугольника ABC. A_1 – точка пересечения прямой BC с перпендикуляром к OA, проходящим через точку O. Аналогично определяются точки B_1, C_1. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

8. I – центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая, проходящая через I перпендикулярно AI, пересекает BC в точке A_1; аналогично определяется точка C_1. Прямые AA_1 и CC_1 пересекаются в точке K. Докажите, что $KI \perp AC$.

9. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 – высоты неравнобедренного остроугольного треугольника ABC; окружности, описанные около треугольников ABC и A_1B_1C, вторично пересекаются в точке P, Z – точка пересечения касательных к описанной окружности треугольника ABC, проведённых в точках A и B. Докажите, что прямые AP, BC и ZC_1 пересекаются в одной точке.