

Наконец-то нормальный геом

1. Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках A_0 и C_0 . Прямая, проходящая через центр вписанной окружности параллельно AC , пересекает прямую A_0C_0 в точке P . Докажите, что PB касается описанной окружности ABC .
2. На медиане CD треугольника ABC отмечена точка E . Окружность S_1 , проходящая через E и касающаяся прямой AB в точке A , пересекает сторону AC в точке M . Окружность S_2 , проходящая через E и касающаяся прямой AB в точке B , пересекает сторону BC в точке N . Докажите, что описанная окружность треугольника CMN касается S_1 и S_2 .
3. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ стороны BC и CD равны. Окружность Ω с центром C касается отрезка BD . Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABD . Докажите, что прямая, проходящая через I параллельно AB , касается Ω .
4. Внутри окружности зафиксирована точка P , C – произвольная точка окружности, AB – хорда, проходящая через точку P перпендикулярно PC . Точки X и Y являются проекциями точки P на прямые AC и BC . Докажите, что все прямые XY касаются одной и той же окружности.
5. Пусть AD – биссектриса треугольника ABC , и прямая l касается окружностей, описанных около треугольников ABD и ACD в точках M и N соответственно. Докажите, что окружность, проходящая через середины отрезков BD , CD и MN , касается прямой l .
6. Дана окружность, точка A на ней и точка M внутри неё. Через M проводятся всевозможные хорды BC . Докажите, что окружность 9 точек треугольника ABC касается некоторой фиксированной окружности.
7. Дана окружность и точка P внутри неё. Рассматриваются пары окружностей касающиеся данной и друг друга в точке P . Найдите ГМТ пересечения общих внешних касательных к этим окружностям.
8. Пусть ABC — треугольник, в котором $\angle CAB > \angle ABC$, а I — центр его вписанной окружности. Пусть D — точка на отрезке BC такая, что $\angle CAD = \angle ABC$. Пусть ω — окружность, касающаяся AC в точке A и проходящая через I . Пусть X — вторая точка пересечения ω и описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что биссектрисы углов $\angle DAB$ и $\angle CXB$ пересекаются в точке, лежащей на прямой BC .