Разнобой?

1. Вписанный шестиугольник $ABCDEF$ таков, что $AB = CD = EF$. Пусть P, Q и R — точки пересечения $AC \cap BD$, $CE \cap DF$ и $AE \cap BF$ соответственно. Докажите, что треугольник PQR подобен FBD.

2. Окружность пересекает стороны треугольника ABC в точках $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ (точки идут на окружности именно в таком порядке). Пусть $X = B_1C_1 \cap B_2C_2$, $Y = A_1C_1 \cap A_2C_2$, $Z = A_1B_1 \cap A_2B_2$. Докажите, что AX, BY, CZ пересекаются в одной точке.

3. Точка X, лежащая вне непересекающихся окружностей ω_1 и ω_2 такова, что отрезки касательных, проведённых из X к ω_1 и ω_2, равны. Докажите, что точка пересечения диагоналей четырёхугольника, образованного точками касания, совпадает с точкой пересечения общих внутренних касательных к ω_1 и ω_2.

4. На окружности, описанной около треугольника ABC, даны точки M и N. Прямая, проведённая через точку M параллельно стороне AB, вторично пересекает окружность в точке P, а прямая NP пересекает прямую AB в точке C_1. Аналогичные построения, выполненные для других двух сторон треугольника, дают точки A_1 и B_1. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 коллинеарны.

5. Пусть CD и BE — высоты треугольника ABC, F и G — основания перпендикуляров из D и E соответственно на BC, $N = DG \cap EF$. Докажите, что $AM \perp BC$.

6. Пусть $ABCDEF$ — такой вписанный шестиугольник, что $\angle B + \angle D + \angle F = 360^\circ$ и

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} - 1.$$

Докажите, что

$$\frac{BC}{CA} \cdot \frac{AE}{EF} \cdot \frac{FD}{DB} = 1.$$