

Синусный счет: для тех, кто уже немного умеет

1. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC . Прямая AO пересекает BC в точке D . Точки E и F на сторонах AB и AC соответственно таковы, что A, E, D и F лежат на одной окружности. Докажите, что длина проекции отрезка EF на прямую BC не зависит от положения точек E и F .
2. В остроугольном треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности; AP — высота. Докажите, что если $\angle BCA \geq \angle ABC + 30^\circ$, то $\angle CAB + \angle COP < 90^\circ$.
3. Треугольник ABC таков, что $2BC = AB + AC$; I — центр вписанной окружности, ω — описанная окружность, D — пересечение AI и ω . Докажите, что I — середина AD .
4. (ИМО 2018-6) Выпуклый четырехугольник $ABCD$ таков, что $AB \cdot CD = BC \cdot AD$. Точка X выбрана внутри четырехугольника так, что $\angle XAB = \angle XCD$, $\angle XBC = \angle XDA$. Докажите, что $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$.
 - (а) Пусть R — точка пересечения диагоналей. Докажите, что изогоналы AC относительно углов A и C пересекаются на BD . Обозначьте полученную точку K .
 - (б) Докажите, что BD — биссектриса AKC .
 - (в) Пусть $(AKB) \cap (CKD) = K \cup X'$. Докажите, что X' удовлетворяет условию для точки X .
 - (г) Докажите единственность точки X и решите задачу.