Синусный счет: для тех, кто не умеет считать

1. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник, M, N — середины дуг AB и CD, I, J — центры вписанных окружностей ABD, CBD. Докажите, что MN делит IJ пополам.

2. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Пусть K_1 и K_2 — точки на ω_1 и ω_2 соответственно такие, что K_1A касается ω_2, а K_2A касается ω_1. Описанная окружность треугольника K_1BK_2 пересекает вторично прямые AK_1 и AK_2 в точках L_1 и L_2 соответственно. Докажите, что точки L_1 и L_2 равноудалены от прямой AB.

3. Даны две окружности, касающиеся внутренним образом в точке N. Касательная к внутренней окружности, проведённая в точке K, пересекает внешнюю окружность в точках A и B. Пусть M — середина дуги AB, не содержащей точку N. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника BMK, не зависит от выбора точки K на внутренней окружности.

4. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC, AC, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Вневписанная окружность касается стороны AC в точке B_2, и продолжении сторон AB и BC в точках C_2 и A_2 соответственно. На отрезках A_1C_1 и A_2C_2 отмечены точки X и Y соответственно, такие что $XB_1 \perp AC$ и $YB_2 \perp AC$. Докажите, что $AXCY$ — паралеллограмм.

Лемма Однакова. В треугольнике ABC на прямой AC выбрана точка D. Докажите, что

$$\frac{\sin\angle ABD}{\sin\angle DBC} = \frac{AD\cdot BC}{DC\cdot AB}.$$

Еще одна важная лемма. В треугольнике ABC проведена чевиана BD. Докажите, что она однозначно определяется отношением синусов ориентированных углов

$$\frac{\sin\angle ABD}{\sin\angle DBC}.$$

5. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка P таким образом, что $\angle PAD = \angle PCD$. Докажите, что $\angle PBC = \angle PDC$.

6. В треугольник ABC вписана окружность w с центром I, касающаяся сторон AB, BC, CA в точках M, N, P соответственно. T — точка пересечения CI и w. $R = AT \cap MP$, $Q = BT \cap MN$. Докажите, что $RQ \perp IC$.

7. На стороне AB треугольника ABC взяты такие точки X, Y, что $AX = BY$. Прямые CX и CY вторично пересекают описанную окружность треугольника в точках U и V. Докажите, что все прямые UV проходят через одну точку.

8. В треугольнике ABC проведена биссектриса AA_0, на отрезке AA_0 выбрана точка X. Прямая BX пересекает AC в точке B_0, а прямая CX пересекает AB в точке C_0. Отрезки

A_0B_0 и CC_0 пересекаются в точке P, а отрезки A_0C_0 и BB_0 пересекаются в точке Q. Докажите, что углы PAC и QAB равны.

9. Пусть $ABCD$ — описанный четырехугольник, а M — середина хорды, высекаемой диагональю AC. Докажите, что $\angle BMA = \angle DMA$.