

Complex dungeons: тренимся на ботах

Раннее утро, вы сидите под греющими лучами солнца. Вам уже не терпится приступить к тренировкам. Перед глазами у вас формулы, которые вы стараетесь запомнить как можно скорее. Наконец к вам обращается чародей:

— *Запомни главное: в этом искусстве преуспевает тот, кто много и прилежно тренируется. Тренировки – ключ к успеху.*

Но слова чародея для вас ничего не меняют. Вы уже давно решили, что пойдёте на всё ради своей цели.

Мысль. Если задача построена вокруг какой-то окружности, то возьмите её за единичную.

1. Докажите, что во всяком вписанном четырёхугольнике отрезки, соединяющие каждую вершину четырёхугольника с ортоцентром треугольника, образованного тремя другими вершинами, пересекаются в одной точке.
2. Докажите, что расстояние между ортогональными проекциями точки окружности на два её заданных диаметра не зависит от положения точки на окружности.
3. Докажите, что если средние линии четырёхугольника равны, то его диагонали перпендикулярны, и обратно.
4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что ортоцентры треугольников BCD , CDA , DAB , ABC лежат на одной окружности, равной данной.
5. **Прямая Ньютона.** Окружность с центром O вписана в четырёхугольник $ABCD$. Точки K и L – середины диагоналей AC и BD . Докажите, что K , L , O лежат на одной прямой.
6. **Теорема Монжа.** Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ всевозможные перпендикуляры, опущенные из середины одной стороны на противоположную, пересекаются в одной точке.
7. Точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC . Пусть H – ортоцентр ABC , X , Y , Z – точки симметричные P относительно BC , AC , AB соответственно. Доказать, что точки X , Y , Z , H лежат на одной прямой.
8. Прямая l касается описанной окружности треугольника ABC в точке B . K – проекция ортоцентра ABC на l , L – середина AC . Докажите, что треугольник BKL равнобедренный.