Complex dungeons: Туториал

Пока у вас за спиной раздаются раскаты грома, вы, промокший до никти и полный решимости, ожидаете когда вас впустят в лачугу местоного чародея. В душе у вас отзывается боль от той самой олимпиады, где до диплома вам не хватило решить геому. Со временем эта боль переросла в твёрдое намерение, которое и привело вас сюда. Наконец дверь открывается, и перед вами появляется старый человек с очень уставшим взглядом.
— Чего тебе?
— Научите меня считать в комплексных.

База. Основная идея состоит в том, что есть однозначное соответствие между точками на плоскости и комплексными числами. Пусть у меня есть точки A, B, C которым соответствуют комплексные числа a, b, c. Тогда то, что точки A, B, C лежат на одной прямой, равносильно тому, что вектора $a-b$ и $a-c$ коллинеарны, что в свою очередь равносильно тому, что число $\frac{a-b}{a-c}$ вещественное. Но то, что комплексное число z – вещественно, равносильно тому, что $z = \overline{z}$. Итого мы получили следующий факт:

Факт №1 Точки A, B, C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\dfrac{a-b}{a-c} = \dfrac{\overline{a}-\overline{b}}{\overline{a}-\overline{c}}$.

Теперь напишем условие на то, что прямые AB и CD перпендикулярны. Это равносильно тому, что перпендикулярны вектора $a-b$ и $c-d$, а это равносильно тому, что $arg\frac{a-b}{c-d} = \pm\frac{\pi}{2}$. Последнее равносильно тому, что $\frac{a-b}{c-d}$ чисто мнимое. Комплексное число z чисто мнимо тогда и только тогда, когда $z = -\overline{z}$. Итого:

Факт №2 Прямые AB и CD перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\dfrac{a-b}{c-d} = -\dfrac{\overline{a}-\overline{b}}{\overline{c}-\overline{d}}$.

Используя только указанные выше утверждения, легко вывести самые простые тождества для счета в комплексных координатах:

1. Прямые AB и CD параллельны тогда и только тогда, когда $\dfrac{a-b}{c-d} = \dfrac{\overline{a}-\overline{b}}{\overline{c}-\overline{d}}$.
2. Уравнение прямой AB имеет вид $(\overline{b}-\overline{a})z + (a-b)\overline{z} = a\overline{b} - \overline{a}b$.
3. Уравнение прямой, проходящей через точку C перпендикулярно AB, имеет вид: $(\overline{a}-\overline{b})z + (a-b)\overline{z} = (\overline{a}-\overline{b})c + (a-b)\overline{c}$.
4. Если C делит отрезок AB в отношении λ, то $c = \frac{a+\lambda b}{1+\lambda}$.
5. Если M – центр масс ABC, то $m = \frac{a+b+c}{3}$.

Единичная окружность. Единичной окружностью Ω будем называть окружность с центром в начале координат и радиусом 1. Уравнение этой окружности имеет очень простой вид: $z\overline{z} = 1$. Гораздо полезнее переписать его в следующем виде $\overline{z} = \frac{1}{z}$. Это тождество является основным при счете в комплексных координатах, т. к. позволяет выражать сопряженные переменные через исходные. Многие тождества также упрощаются, если в них присутствуют лежащие на единичной окружности переменные.

— Искусство, которому я тебя обучу, очень мощное оружие, но лишь в руках того, кто умеет с ним грамотно обращаться.

Перевожу слова чародея: при счёте в комплексных надо стараться сделать так, чтобы выкладки были как можно более компактными – иначе на олимпиаде счёт в комплексных может занять очень много времени (либо вообще не досчитаться). Например во всех задачах ниже есть решение в 1-2 строчки. Вообще может быть полезно "лениться считать", это побудит вас думать, как сделать счёт попроще)

6. Пусть $A, B, C, D \in \Omega$. Тогда $AB \parallel CD \Leftrightarrow ab = cd$.

7. Пусть $A, B, C, D \in \Omega$. Тогда $AB \perp CD \Leftrightarrow ab = -cd$.

8. Пусть $A, B \in \Omega$. Тогда уравнение прямой AB имеет вид $z + ab\overline{z} = a + b$.

9. Пусть $A, B \in \Omega$. Тогда уравнение прямой, перпендикулярной AB и проходящей через C, имеет вид $z - ab\overline{z} = c - ab\overline{c}$.

10. Пусть $A, B \in \Omega$. Тогда если M – основание перпендикуляра из C на AB, то $m = \frac{1}{2}(a + b + c - ab\overline{c})$.

11. Пусть $A, B \in \Omega$. Тогда если M симметрична точке C относительно прямой AB, то $m = a + b - ab\overline{c}$.

12. Убедитесь, что задачи с 6 по 11 верны, если $A = B$ и вместо прямой AB касательная в точке A.

13. Если $A, B \in \Omega$, то касательные в точках A и B пересекаются в точке $\frac{2ab}{a+b}$.

14. Пусть $A \in \Omega$, M – произвольная точка. Тогда прямая AM повторно пересекает Ω в точке $\frac{m-a}{1-a\overline{m}}$.

15. Если $A, B, C \in \Omega$, а H ортоцентр ABC, то $h = a + b + c$.