Двойные отношения

Определение. *Двойным отношением* четвёрки точек $(ABCD)$ называют число $\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD}$ или число $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$.

Определение. *Двойным отношением* четвёрки прямых (PA, PB, PC, PD), проходящих через одну точку, называют число $\frac{\sin\angle(PA,PC)}{\sin\angle(PA,PD)} : \frac{\sin\angle(PB,PC)}{\sin\angle(PB,PD)}$.

Определение. Четвёрка точек, для которой $(ABCD) = -1$, называется *гармонической*.

Определение. *Двойным отношением* четвёрки точек $(ABCD)$, лежащих на одной окружности, называется двойное отношение (PA, PB, PC, PD) для любой точки P на этой же окружности. (Проверьте корректность определения!)

Предложение. Для любых четырёх точек A, B, C, D, лежащих на одной прямой, и точки P, не лежащей на этой прямой, верно равенство $(ABCD) = (PA, PB, PC, PD)$.

Следствие. Двойное отношение точек сохраняется при проецировании с **(а)** прямой на прямую **(б)** прямой на окружность из точки окружности **(в)** окружности на прямую из точки окружности **(г)** окружности на окружность из точки пересечения.

1. **(а)** Чевианы AA_1, BB_1 и CR треугольника ABC пересекаются в точке P. Прямые A_1B_1 и AB пересекаются в точке T. Докажите, что $(ABRT) = (ABTR) = (BATR) = (BART) = -1$. **(б)** Положим, что M — середина AB, а R — бесконечно удалённая точка. Докажите, что $(ABMR) = -1$. **(в)** P и Q — основания внешней и внутренней биссектрис угла C треугольника ABC. Докажите, что $(ABPQ) = -1$. **(г)** Точки P и Q инверсны относительно окружности ω. Прямая PQ пересекает ω в точках A и B. Докажите, что $(ABPQ) = -1$. **(д)** Центры двух окружностей и их центры отрицательной и положительной гомотетии составляют гармоническую четвёрку точек. **(е)** Вершины гармонического четырёхугольника образуют гармоническую четвёрку. **(ж)** Если через точку провести прямую, пересекающую окружность в двух точках, и взять ещё точку пересечения этой прямой с полярой исходной точки, то 4 такие точки образуют гармоническую четвёрку.

2. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон AB, BC и AC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Прямые A_1C_1 и AC пересеклись в точке K. Прямая, проходящая через точку B_1 и параллельная стороне AB пересекается с прямой BK в точке L. Докажите, что середина отрезка B_1L лежит на стороне BC.

3. Обозначим через P основание внутренней биссектрисы угла C треугольника ABC, а через Q — внешней. Пусть M — середина CB, а прямые PM и AC пересекаются в точке R. Докажите, что $RQ = RC$.

4. Через вершину B провели прямую, параллельную прямой Эйлера треугольника ABC

и пересекли её с прямой B_0H в точке K (B_0 — середина AC). Найдите в каком отношении H делит отрезок B_0K.

5. **(Полезная лемма)** Через точку проходят прямые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 и ℓ_4, причём $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4) = -1$. Докажите, что если прямые ℓ_1 и ℓ_2 перпендикулярны, то они являются биссектрисами угла, образованного прямыми ℓ_3 и ℓ_4.

6. Через точку на высоте BB_1 провели чевианы AA' и CC'. Докажите, что B_1B — биссектриса угла $A'B_1C'$.

7. Пусть H_B — основание высоты треугольника ABC, проведённой из вершины B; L_B — основание соответствующей биссектрисы; K_B — точка касания вписанной окружности со стороной AC; T_B — точка касания вневписанной окружности со стороной AC. Точки H_A, L_A, K_A, T_A определяются аналогично. Докажите, что **(а)** $(H_B, L_B, K_B, T_B) = -1$; **(б)** $(C, H_B, T_B, K_B) = (C, H_A, T_A, K_A)$; **(в)** прямые $H_AH_B, L_AL_B, K_AK_B, T_AT_B$ конкурентны.

8. **Построение одной линеечкой. (а)** Постройте четвёртую гармоническую точку к трём данным и четвёртую гармоническую прямую к трём данным. **(б)** Даны две параллельных прямых. Поделите данный отрезок на одной из них пополам. **(в)** В условиях предыдущего пункта удвойте отрезок на одной из них.

9. Даны параллелограмм, прямая и точка. Постройте прямую, проходящую через данную точку и параллельную данной прямой.

10. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке R, а продолжения боковых сторон в точках P и Q. Пусть T — основание перпендикуляра, опущенного из R на PQ. Докажите, что $\angle ATR = \angle CTR$.

11. **(а) Теорема о бабочке.** Хорды AB и CD окружности ω проходят через середину M хорды XY той же окружности. Отрезки AC и BD пересекают XY в точках P и Q. Докажите, что $MP = MQ$. **(б) Теорема о двойной бабочке.** Хорды AB и CD окружности ω проходят соответственно через точки X' и Y', лежащие на хорде XY, такие что $XX' = YY'$. Отрезки AC и BD пересекают XY в точках P и Q. Докажите, что $XP = YQ$.

12. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Пусть I и J — центры вписанных окружностей треугольников ALC и ALB. Прямая IJ пересекает прямые AB и AC в точках C' и B' соответственно. Докажите, что прямые AL, BB' и CC' пересекаются в одной точке.