Для тех, кому скучно

1. Вписанная окружность ω равнобедренного треугольника ABC касается его равных сторон AB, BC и основания AC в точках P, Q и R соответственно. Отрезки AQ и CP повторно пересекают окружность ω в точках K и L соответственно. Докажите, что отрезок KL делится отрезками PR и QR на три равные части.

2. Даны правильный треугольник ABC с центром O и точка P, не лежащая на его оси симметрии. Прямые AP, BP и CP пересекают соответственно прямые BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что окружности, описанные около треугольников AOA_1, BOB_1 и COC_1, имеют две общих точки.

3. Точки I и H – центр вписанной окружности и ортоцентр остроугольного треугольника ABC соответственно. Обозначим через R_A радикальный центр вписанной окружности и двух вневписанных, касающихся сторон AC и AB. Точки R_B и R_C определяются аналогично. Докажите, что центр описанной окружности треугольника $R_AR_BR_C$ лежит на прямой HI.

4. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Касательная к описанной окружности треугольника BOC пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Обозначим через A_0 точку, симметричную A относительно DE. Докажите, что описанная окружность треугольника A_0DE касается описанной окружности треугольника ABC.

5. Треугольник ABC имеет периметр 2. Проведём биссектрисы его внутренних углов (биссектриса - это луч) и отложим на них отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 длины 1. Докажите, что каждая сторона треугольника $A_1B_1C_1$ больше 1.

6. Дан описанный четырехугольник $ABCD$. Пусть $X = AB \cap CD$, $Y = BC \cap DA$, $Z = AC \cap BD$. Известно, что $XZ < YZ$. Докажите, что $\angle AZD$ — тупой.