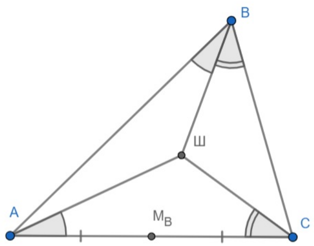
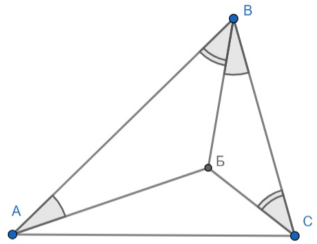
Точки Шалтая и Болтая





Определения. *Точка Шалтая* в треугольнике ABC это точка пересечения двух окружностей, проходящих через B и касающихся AC в точках A и C соответственно. *Точка Болтая* это пересечение двух окружностей, проходящих через A и C соответственно и касающихся соответственно BC и BA в точке B.

1. **Свойства точки Шалтая**
   (а) Точка Шалтая лежит на медиане BM_B.
   (б) Точка Шалтая лежит на окружности Аполлония для отрезка AC и отношения AB/BC.
   (в) Отражение точки Шалтая относительно M_B и AC лежат на окружности (ABC).
   (г) Отражение точки Шалтая относительно AC дополняет ABC до гармонического четырёхугольника.
   (д) A, C, точка Шалтая и H лежат на одной окружности.
   (е) Точка Шалтая это проекция H на медиану.
   (ж) Точка Шалтая лежит на окружности (H_ABH_C), где H_A и H_C – основания высот.
   (з) Пусть H_AH_C пересекает AC в точке S. Докажите, что точка Шалтая лежит на прямой SH.

2. **Свойства точки Болтая**
   (а) Точка Болтая изогонально сопряжена точке Шалтая.
   (б) Точка Болтая лежит на симедиане.
   (в) A, C, O и точка Болтая лежат на одной окружности.
   (г) Точка Болтая это проекция O на симедиану.
   (д) Точка Болтая лежит на окружности M_ABM_C, где M_A и M_C – середины сторон.

3. Пусть окружность проходящая через A, C и точку Болтая пересекает стороны BA и BC в точках A_1 и C_1. Докажите, что точка Шалтая A_1BC_1 совпадает с точкой Болтая ABC.

4. Пусть P это точка пересечения M_BH с окружностью (ABC). Для какого треугольника P – точка Шалтая?

5. Стороны BC и CD вписанного четырёхугольника $ABCD$ равны. Точка E – отражение

B относительно C. Докажите, что отражение точки пересечения диагоналей $ABCD$ относительно BC лежит на окружности (ABE).

6. Пусть окружности M_ACH_B и M_CAH_B пересекаются повторно в точке Q. Докажите, что BQ – симедиана.

7. Биссектриса BD треугольника ABC пересекает его высоты AA_1 и CC_1 в точках A_2 и C_2. Докажите, что описанные окружности треугольников AA_2D и CC_2D пересекаются на медиане треугольника ABC.

8. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки C' и A', так что четырёхугольник $C'BA'X$ – вписанный в окружность Ω, где X – точка пересечения прямых AA' и CC'. Тогда окружность Ω проходит через точку Шалтая.

9. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BE и CF. Две окружности, проходящие через точки A и F, касаются прямой BC в точках P и Q так, что B лежит между C и Q. Докажите, что прямые PE и QF пересекаются на описанной окружности треугольника AEF.

10. Внешняя биссектриса угла B треугольника ABC пересекает продолжение стороны AC в точке D. Пусть I – центр вписанной окружности, I_B – центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC; а L – середина большей дуги AC описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $DI \perp LI_b$.

11. Восстановите треугольнике по точке Шалтая, точке P из задачи 4 и точке пересечения семедианы с описанной окружностью.