

Признаки описанности

1. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC , касаются. Докажите, что окружности, вписанные в треугольники BCD и BAD , тоже касаются.
2. (**Признаки описанности**) Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что лучи AB и DC пересекаются в точке P , а лучи BC и AD пересекаются в точке Q . Докажите, что в $ABCD$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда
 - (а) $AB + CD = BC + AD$;
 - (б) $PB + BQ = PD + DQ$;
 - (в) $AP + CQ = AQ + CP$.(г) Придумайте ещё какой-нибудь признак (вне)вписанности окружности в четырёхугольник, и докажите его.
3. Две прямые, проходящие через точки пересечения пар противоположных сторон выпуклого четырёхугольника делят его на четыре меньших четырёхугольника. Докажите, что если какие-то два из этих четырёхугольников без общей стороны описанные, то и исходный четырёхугольник описанный.
4. На сторонах AB, BC, CD и DA выпуклого четырёхугольника $ABCD$ выбраны точки E, F, G, H соответственно, P – точка пересечения отрезков EG и FH . Докажите, что если четырёхугольники $HAEP, EBFP, FCGP, GDHP$ описанные, то и четырёхугольник $ABCD$ тоже описанный.
5. Окружность с центром I касается сторон BC, AC и AB неравнобедренного треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. В четырёхугольники AC_1IB_1 и CA_1IB_1 вписаны окружности ω_1 и ω_2 . Докажите, что общая внутренняя касательная к ω_1 и ω_2 , отличная от IB_1 , проходит через точку B .
6. В треугольнике ABC на сторонах AB, BC и CA отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно так, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D . Оказалось, что AC_1DB_1 и CA_1DB_1 описанные. Докажите, что DC_1BA_1 тоже описанный.
7. Окружности S_1 и S_2, S_2 и S_3, S_3 и S_4, S_4 и S_1 касаются внешним образом. Докажите, что четыре общие касательные (в точках касания окружностей) либо пересекаются в одной точке, либо касаются одной окружности.
8. Пусть M — точка касания окружности, вписанной в треугольник ABC , со стороной AB , T — произвольная точка стороны BC , отличная от вершины. Докажите, что три окружности, вписанные в треугольники $BMТ, МТА, АТС$, касаются одной прямой.
9. На стороне AC треугольника ABC отмечены точки P и Q . Пусть K — точка пересечения общих внешних касательных к окружностям, вписанным в треугольники ABP и CBQ . Докажите, что точка K так же является точкой пересечения общих внешних касательных для вписанных окружностей треугольников ABQ и CBP .
10. Дана трапеция $ABCD$ с меньшим основанием BC . Точка X — точка пересечения продолжений боковых сторон. Окружность ω вписана в треугольник BXC , а окружность Ω , вневписанная в треугольник AXD , касается отрезка AD . Через точки B и C провели касательные b и c к Ω , отличные от боковых сторон трапеции, а через точки A и D провели касательные a и d к ω , отличные от боковых сторон трапеции. Докажите, что в пересечении прямых a, b, c, d образуется параллелограмм.
11. На стороне AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ выбрана точка P . В треугольнике BPC вписана окружность ω с центром I . Оказалось, что окружность ω касается окружностей, вписанных в треугольники ABP и CDP , в точках K и L соответственно. Обозначим через E точку пересечения отрезков AC и BD , а через F — точку пересечения прямых AK и DL . Докажите, что E, I и F лежат на одной прямой.