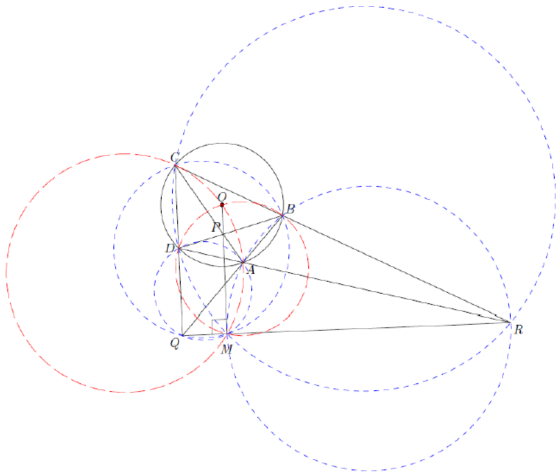
[ЦПМ, кружок по математике, 10 класс]

[*2021–2022*] группа: кружок по геометрии *12 октября 2021 г.*

Большая картинка и точка Микеля

Напоминание 1. Точка Микеля. Дан четырехсторонник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке Q, а прямые AD и BC – в точке R. Тогда окружности, описанные вокруг треугольников ABR, CDR, ADQ, BCQ имеют общую точку M, которая называется точкой Микеля данного четырехсторонника.

Напоминание 2. Поворотная гомотетия. Пусть A, B, C, D — различные точки плоскости, такие что $ABCD$ — не параллелограмм. Тогда существует единственная поворотная гомотетия, переводящая AB в CD. Кроме того, для произвольного четырехугольника $ABCD$ точка Микеля является центром поворотной гомотетии, переводящей AB в CD, а также AD в BC.



1. Докажите, что точка M лежит на прямой QR тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABCD$ вписанный.
2. Докажите, что $OM \perp QR$ (Указание: если гомотетия с центром M переводит отрезок AB в CD, то тогда она же переводит середину AB в середину CD).
3. Докажите, что описанная окружность треугольника AOC проходит через точку M.

Определение. Полярой точки A относительно окружности ω с центром O называется прямая, проходящая через инверсный образ A и перпендикулярная OA.

4. Докажем лемму о поляре. Использую предыдущую задачу, докажите, что

   (а) OM, AC и BD проходят через одну точку.
   (б) P переходит в M при инверсии относительно описанной окружности $ABCD$.
   (в) QR – поляра точки P относительно описанной окружности $ABCD$.

5. Докажите, что O, P, Q, R образуют ортоцентрчическую четверку точек, т.е. что для любых трех из них четвертая точка является ортоцентром образованного ими треугольника.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$ с центром в точке O. Прямые AC и BD пересекаются в точке P, AB и CD пересекаются в точке Q, AD и BC пересекаются в точке R. M – точка Микеля четырехугольника $ABCD$. Тогда верно следующее:
(a) M — центр поворотной гомотетии, переводящей AB в CD, а также AD в BC.
(b) M — проекция точки O на прямую QR.
(c) M — точка, инверсная точке P относительно описанной окружности $ABCD$. В частности, M лежит на прямой OP.
(d) Описанные окружности треугольников AOC и BOD проходят через точку M.

Задачи на большую картинку

6. Докажите, что прямая OM делит $\angle CMA$, равно как и $\angle BMD$, пополам.
7. Дана окружность с диаметром AB и с центром в точке O, и пусть C и D – две различные точки на окружности. Прямая CD пересекает AB в точке M, при этом $MB < MA$, $MD < MC$. Пусть K – вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников AOC и BOD. Докажите, что $\angle MKO = 90°$.
8. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках O и M. Окружность ω с центром в точке O пересекает ω_1 и ω_2 в четырёх различных точках A, B, C и D, образующих выпуклый четырёхугольник. Прямые AB и CD пересекаются в точке N_1, прямые AD и BC пересекаются в N_2. Докажите, что $N_1N_2 \perp MO$.
9. Треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательные к ω в точках B и C пересекаются в точке T. Точка S на луче BC такова, что $AS \perp AT$. Точки B_1 и C_1 лежат на луче ST (C_1 между B_1 и S), и $B_1T = BT = C_1T$. Докажите, что треугольники ABC и AB_1C_1 подобны.
10. Дан равнобедренный треугольник ABC, M — середина основания BC. Точка P такова, что $PA \parallel BC$. Точки X и Y выбраны на продолжениях отрезков PB and P за точки B и C соответственно так, что $\angle PXM = \angle PYM$. Докажите, что $APXY$ вписанный.

Другие задачи на точку Микеля

11. Точки A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. Описанные окружности треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C повторно пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Точки A_3, B_3, C_3 симметричны A_1, B_1, C_1 относительно середин соответствующих сторон. Докажите, что треугольники $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$ подобны.
12. Пусть I — инцентр остроугольного ABC, вписанная окружность касается сторон BC, CA, AB в точках D, E, F соответственно. Прямая EF пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q (точки расположены в порядке $P - E - F - Q$). Докажите, что $\angle DPA + \angle AQD = \angle QIP$.