Окружности Аполлония

Окружность Аполлония: Для данных точек A, B и положительного числа λ, ГМТ таких точек X, что $\frac{AX}{XB} = \lambda$, является окружностью. Эта окружность называется *окружностью Аполлония* отрезка AB с коэффициентом λ.

Инструкция по решению листика: задачи из разных отделов (почти) никак не связаны, так что вы вольны решать их в том порядке, который нравится вам больше)

Свойства окружности Аполлония.

1. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку AB это общая радикальная ось для всевозможных окружностей Аполлония этого отрезка.

2. Пусть ω – окружность Аполлония отрезка AB. Пусть ω пересекает AB в точках X, Y. Отметим M – середину XY, а также точку C на ω. Докажите, что MC касается описанной окружности треугольника ABC.

Обратите внимание, что это значит, что описанная окружность ABC и ω перпендикулярны

3. Пусть ω и описанная окружность треугольника ABC пересекаются в точке D. Докажите, что CD – симедиана ABC.

Задачи на построение.

4. Дан отрезок AB. **(а)** Постройте окружность Аполлония для отрезка AB и рационального коэффициента q. **(б)** Постройте окружность Аполлония для отрезка AB и произвольного коэффициента k, если на отрезка AB отмечена точка C так, что $\frac{AC}{CB} = k$.

5. На прямой даны точки A, B, C и D (в указанном порядке). Объясните, как построить точку M, из которой отрезки AB, BC и CD видны под равными углами (если такая точка существует).

6. Точки A и B лежат на диаметре данной окружности. Проведите через них две равные хорды с общим концом.

7. Постройте ромб $ABCD$ с данной длиной высоты, если заданы его вершина A и точка E – середина стороны BC.

8. Восстановите равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$) по точкам I, M и H пересечения биссектрис, медиан и высот соответственно.

9. В треугольнике ABC отметили центр I вписанной окружности, основание H высоты, опущенной на сторону AB, и центр I_c вневписанной окружности, касающейся этой стороны. После этого сам треугольник стерли. Восстановите его.

10. Восстановите треугольник ABC по его ортоцентру H, и основаниям D и L медианы и биссектрисы, проведенных из вершины A.

Точки Аполлония.

11. Пусть ω_a это окружность Аполлония отрезка BC, проходящая через точку A. Аналогично определяются окружности ω_b и ω_c. Докажите, что ω_a, ω_b и ω_c пересекаются в двух точках.

Эти точки мы будем называть точками Аполлония треугольника ABC. Обратите внимание, что это единственные точки X, обладающие следующим свойством: $AX \cdot BC = BX \cdot AC = CX \cdot AB$.

12. Докажите, что прямая, соединяющая точки Аполлония, проходит через центр описанной окружности ABC.

13. Докажите, что проекции точки Аполлония на стороны треугольника образуют правильный треугольник

14. Докажите, что точки Аполлония изогонально сопряжены точкам Торричелли.

Просто задачи :)

15. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1. Известно, что центр O описанной окружности треугольника BB_1C_1 лежит на прямой AC. Найдите угол ACB.

16. Углы AOB и COD совмещаются поворотом так, что луч OA совмещается с лучом OC, а луч OB – с OD. В них вписаны окружности, пересекающиеся в точках E и F. Доказать, что углы AOE и DOF равны.