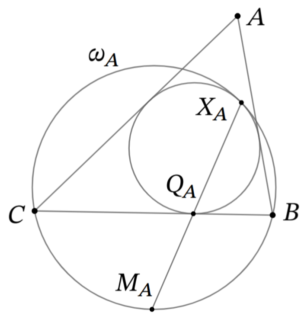
Одна конструкция



(Почти) во все задачах будет картинка выше. Точки $X_B, X_C, Q_B, Q_C, M_B, M_C$ и окружности ω_B, ω_C определяются аналогично. O, I, I_A, I_B, I_C — центры описанной, вписанной и вневписанных окружностей треугольника ABC.

1. Докажите, что описанная окружность треугольника BIC делит отрезок $X_A Q_A$ пополам.

2. Докажите, что $I_A \in X_A Q_A$.

3. Докажите, что $M_A M_B$ делит отрезки CQ_A и CQ_B пополам.

4. Пусть ω — это описанная окружность треугольника $M_A M_B M_C$.
(а) Докажите, что ω касается $\omega_A, \omega_B, \omega_C$. **(б)** Найдите радиус ω.

5. Докажите, что $X_A Q_A$, $X_B Q_B$ и $X_C Q_C$ пересекаются в одной точке, лежащей на прямой OI.

6. Докажите, что радикальный центр $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ лежит на прямой OI.

7. Докажите, что $X_A Q_A$ делит высоту из A пополам.

8. На отрезке BC построили окружность как на диаметре. Докажите, что эта окружность совпадает с ω_A тогда и только тогда, когда $BC = r_A$, где r_A — радиус соответствующей вневписанной окружности.

9. (Турнир Колмогорова) Окружность, проходящая через вершины A и C треугольника ABC, касается вписанной в него окружности ω в точке P. Другая окружность проходит через вершины A и C и касается вневписанной окружности ω_B, соответствующей вершине B, в точке Q. Прямые BP и BQ пересекают отрезок AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что $AX = CY$.