Коши, Буняковский и Шварц

Начнем с известной вам геометрической ситуации. Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — два произвольных вектора на плоскости. Скалярное произведение данных векторов по абсолютной величине не превосходит произведения их длин:

$$|(\overline{a},\overline{b})| \leqslant |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|,$$

поскольку $(\overline{a},\overline{b}) = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\phi$, где ϕ — угол между векторами.

Теперь запишем это неравенство в координатах. Рассмотрим на плоскости прямоугольную декартову систему координат, и пусть векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ имеют в этой системе координаты (a_1, a_2) и (b_1, b_2) соответственно. В таком случае скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и их длины выражаются через их координаты следующим образом:

$$(\overline{a},\overline{b}) = a_1b_1 + a_2b_2, \quad |\overline{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2}, \quad |\overline{b}| = \sqrt{b_1^2+b_2^2}.$$

В результате наше неравенство примет вид

$$|a_1b_1+a_2b_2| \leqslant \sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2},$$

или

$$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2) \geqslant (a_1b_1+a_2b_2)^2.$$

Это и есть *неравенство Коши–Буняковского–Шварца* (КБШ) в простейшем случае $n=2$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда координаты векторов пропорциональны: $a_1/b_1 = a_2/b_2$. Действительно, пропорциональность координат равносильна коллинеарности векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, то есть условию $\cos\phi = \pm1$ или $(\overline{a},\overline{b}) = \pm|\overline{a}||\overline{b}|$.

Если провести аналогичные рассуждения с векторами в трехмерном пространстве, то получится неравенство КБШ для $n=3$:

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+b_3^2) \geqslant (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2.$$

Равенство достигается при $a_1/b_1 = a_2/b_2 = a_3/b_3$.

В общем случае неравенство Коши–Буняковского–Шварца имеет вид

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2) \geqslant (a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2$$

для любых двух наборов действительных чисел $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ и $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда эти наборы пропорциональны: $a_1/b_1 = a_2/b_2 = \ldots = a_n/b_n$ (в записи пропорциональности мы допускаем нуль в знаменателе, когда нуль присутствует и в соответствующем числителе).

Для положительных чисел $(x_1,\ldots,x_n)$, $(y_1,\ldots,y_n)$ неравенство КБШ можно переписать в следующем виде:

$$(x_1+\ldots+x_n)(y_1+\ldots+y_n) \geqslant (\sqrt{x_1y_1}+\ldots+\sqrt{x_ny_n})^2.$$

1. Рассмотрев квадратный трехчлен

$$f(x) = (a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\ldots+(a_nx-b_n)^2,$$

докажите неравенство КБШ без привлечения геометрии.

2. **Лемма Титу, или КБШ для дробей.** Докажите, что для любых действительных чисел $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n$ (где $y_i>0$) выполнено неравенство

$$\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{y_n} \geqslant \frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2}{y_1+y_2+\ldots+y_n}.$$

Замечание 1. Для того, чтобы заставить лемму Титу работать, как правило, необходимо создать полные квадраты в числителях дробей.

Замечание 2. В некоторых ситуациях нужно использовать не лемму Титу, а неравенство КБШ. Как это можно делать? Во-первых, обычно оно используется, чтобы сложить три дроби, поэтому сначала эти дроби надо создать. Во-вторых, для того, чтобы сложить дроби, хотелось бы домножить каждую на ее собственный знаменатель. Неравенство КБШ позволяет легализовать эту операцию.

Пусть нам нужно доказать неравенство $\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3} \geqslant c$. Домножим левую часть неравенства на $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ и применим КБШ:

$$\Big(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}\Big)(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3) \geqslant (a_1+a_2+a_3)^2.$$

Таким образом, достаточно доказать неравенство $(a_1+a_2+a_3)^2 \geqslant c(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$, в котором уже нет дробей.

Трюк с домножением очень часто бывает полезен при применении КБШ!

3. Для любых $a,b,c>0$ докажите, что

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}.$$

4. Пусть a, b и c — положительные вещественные числа, такие, что $abc=1$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

5. Даны числа x, y и $z \geqslant 1$, удовлетворяющие соотношению $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Докажите неравенство

$$\sqrt{x+y+z} \geqslant \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}.$$

6. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{1}{(a+b)b}+\frac{1}{(b+c)c}+\frac{1}{(c+a)a} \geqslant \frac{9}{2(ab+bc+ca)}.$$

7. Положительные числа a, b, c, x, y и z удовлетворяют соотношению $xyz = ax+by+cz$. Докажите, что

$$x+y+z > \sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}.$$