

Клетчатый комбигеом

- (а) На клетчатой решётке отмечены 5 узлов. Докажите, найдётся отрезок с концами в отмеченных узлах, содержащий по крайней мере ещё один узел.

(б) На клетчатой решётке отмечены $n^2 + 1$ узлов. Докажите, найдётся отрезок с концами в отмеченных узлах, содержащий по крайней мере ещё $n - 1$ узел.

(в) Какое минимальное количество узлов сетки из правильных шестиугольников необходимо взять, чтобы среди них обязательно нашлось два, середина отрезка между которыми — тоже узел этой сетки?
- Вершины некоторого треугольника лежат в узлах квадратной сетки, причём других узлов на границе треугольника нет, а внутри треугольника находится ровно один узел сетки. Докажите, что этот узел совпадает с точкой пересечения медиан треугольника.
- Существует ли равносторонний (а) треугольник (б) семиугольник (в) 100-угольник с вершинами в узлах квадратной сетки?
- (Теорема Минковского)** На плоскости дана центрально-симметричная (относительно узла) выпуклая фигура площади больше 4. Докажите, что она содержит больше одного узла.
- На плоскости расположено 2023 единичных квадрата со сторонами, параллельными координатным осям. Иван закрасил все области, накрытые нечётным числом квадратов. Докажите, что площадь закрашенной области не меньше одного.
- На координатной плоскости расположили треугольник так, что его сдвиги на векторы с целочисленными координатами не перекрываются. (а) Может ли площадь такого треугольника быть больше $1/2$? (б) Найдите наибольшую возможную площадь такого треугольника.