

Округление

- (а) Докажите, что любое вещественное число α можно домножить на натуральное число m так, что число αm будет «почти целым»: т.е. отличаться от ближайшего целого числа не более чем на наперёд заданное число $\varepsilon > 0$.

(б) Пусть α — иррациональное. Докажите, что для любых $0 < x < 1, \varepsilon$ найдётся натуральное m , для которого верно $|\{\alpha m\} - x| < \varepsilon$.

(в) Докажите, что любые два числа α_1 и α_2 можно домножить на натуральное число m так, что числа $\alpha_1 m$ и $\alpha_2 m$ будут «почти целыми».

(г) Верно ли следующее утверждение? Пусть α_1, α_2 — иррациональные. Тогда для любых $0 < x_1, x_2 < 1, \varepsilon$ найдётся натуральное m , для которого верно $|\{\alpha_1 m\} - x_1| < \varepsilon$ и $|\{\alpha_2 m\} - x_2| < \varepsilon$.
- Имеется 101 корова. Известно, что любые 100 коров можно разбить на два стада одинакового веса, по 50 коров в каждом. Докажите, что все коровы весят равное число граммов. (а) Вспомните, как решать задачу в случае, когда коровы весят целое число граммов.

(б) Обобщив первую задачу, решите задачу в общем случае.
- (а) Около каждой вершины куба стоит число. На каждом ребре поставили сумму чисел в ее вершинах. Верно ли, что числа и суммы можно округлить так, что равенства не нарушатся?

(б) Около каждой вершины 1001-угольника стоит число. На каждой стороне поставили сумму чисел в ее вершинах. Верно ли, что числа и суммы можно округлить так, что равенства не нарушатся?
- Докажите, что в любом равенстве вида $x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_m$ все слагаемые можно округлить так, что равенство останется верным.
- В прямоугольную таблицу записаны некоторые числа, причём суммы по строкам и суммы по столбцам — целые числа. Докажите, что все числа таблицы можно округлить так, что как суммы по строкам и столбцам не изменятся.
- Магазин получил несколько заказов, каждый заказ состоит из попарно различных товаров. Удивительно, но в магазине не осталось ни одной монеты номиналом меньше 1 рубля. Поэтому руководство приняло решение округлить цену каждого товара вверх или вниз так, чтобы цена каждого товара стала целой. Докажите, что если каждый товар заказали не более n раз, то можно округлить цены так, чтобы стоимость каждого заказа изменилась не более чем на n рублей.