

## Округление

- (а)** Докажите, что любое вещественное число  $\alpha$  можно домножить на натуральное число  $m$  так, что число  $\alpha m$  будет «почти целым»: т.е. отличаться от ближайшего целого числа не более чем на наперёд заданное число  $\varepsilon > 0$ .

**(б)** Пусть  $\alpha$  — иррациональное. Докажите, что для любых  $0 < x < 1, \varepsilon$  найдётся натуральное  $m$ , для которого верно  $|\{\alpha m\} - x| < \varepsilon$ .

**(в)** Докажите, что любые два числа  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  можно домножить на натуральное число  $m$  так, что числа  $\alpha_1 m$  и  $\alpha_2 m$  будут «почти целыми».

**(г)** Верно ли следующее утверждение? Пусть  $\alpha_1, \alpha_2$  — иррациональные. Тогда для любых  $0 < x_1, x_2 < 1, \varepsilon$  найдётся натуральное  $m$ , для которого верно  $|\{\alpha_1 m\} - x_1| < \varepsilon$  и  $|\{\alpha_2 m\} - x_2| < \varepsilon$ .
- Имеется 101 корова. Известно, что любые 100 коров можно разбить на два стада одинакового веса, по 50 коров в каждом. Докажите, что все коровы весят равное число граммов. **(а)** Вспомните, как решать задачу в случае, когда коровы весят целое число граммов.

**(б)** Обобщив первую задачу, решите задачу в общем случае.
- (а)** Около каждой вершины куба стоит число. На каждом ребре поставили сумму чисел в ее вершинах. Верно ли, что числа и суммы можно округлить так, что равенства не нарушатся?

**(б)** Около каждой вершины 1001-угольника стоит число. На каждой стороне поставили сумму чисел в ее вершинах. Верно ли, что числа и суммы можно округлить так, что равенства не нарушатся?
- Докажите, что в любом равенстве вида  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_m$  все слагаемые можно округлить так, что равенство останется верным.
- В прямоугольную таблицу записаны некоторые числа, причём суммы по строкам и суммы по столбцам — целые числа. Докажите, что все числа таблицы можно округлить так, что как суммы по строкам и столбцам не изменятся.
- Магазин получил несколько заказов, каждый заказ состоит из попарно различных товаров. Удивительно, но в магазине не осталось ни одной монеты номиналом меньше 1 рубля. Поэтому руководство приняло решение округлить цену каждого товара вверх или вниз так, чтобы цена каждого товара стала целой. Докажите, что если каждый товар заказали не более  $n$  раз, то можно округлить цены так, чтобы стоимость каждого заказа изменилась не более чем на  $n$  рублей.