

Перестановки

1 Теория

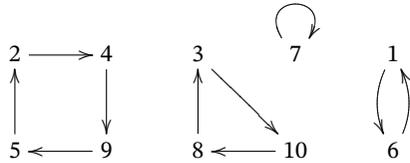
Определение. Перестановкой называется биективное отображение $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$.

Пример.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sigma(m)$	6	4	10	9	2	1	7	3	5	8

Замечание. Любую перестановку можно изобразить в виде ориентированного графа: вершины графа — числа $1, 2, \dots, n$; ребро $i \rightarrow j$ означает $\sigma(i) = j$.

Пример.



В полученном графе все исходящие и входящие степени вершин равны 1, откуда следует, что он разбивается на циклы. *Циклом* перестановки называется цикл соответствующего графа.

Инверсией перестановки σ называется пара чисел i, j такая, что $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Чётностью перестановки называется чётность количества инверсий.

Транспозицией называется перестановка, которая меняет два элемента местами, а остальные оставляет на месте.

2 Задачи

- Докажите, что следующие свойства эквивалентны:
 - перестановка содержит чётное количество инверсий;
 - перестановку можно получить из тождественной, используя чётное количество транспозиций;
 - перестановку нельзя получить из тождественной, используя нечётное количество транспозиций;
 - перестановка содержит чётное количество циклов чётной длины.
- Нескольким детям дали по карандашу одного из трех цветов. Дети как-то поменялись карандашами, после чего у каждого оказался не тот карандаш, который был у него вначале. Докажите, что цвета карандашей могли быть такими, что у каждого вначале и в конце карандаши были разных цветов.
- В некотором городе разрешаются только парные обмены квартир (если две семьи обмениваются квартирами, то в тот же день они не имеют права участвовать в другом обмене). Докажите, что любой обмен квартирами можно осуществить за два дня.
- На игру "Тайный Санта" пришли 20 незнакомых друг с другом людей. Каждый принёс с собой подарок. Все выстроились в хоровод и начинают обмениваться подарками. Раз в минуту в центр хоровода выходят два участника, знакомятся и обмениваются имеющимися у них подарками (возможно, уже не своими). В конце оказалось, что каждый подарок перешёл от владельца к его соседу по часовой стрелке. **(а)** Через какое минимальное число минут такое могло случиться? **(б)** Как в таком случае устроен граф знакомств?
- Хулиган Вася из кубика Рубика вынул кубик на ребре и вернул неправильным образом. Докажите, теперь кубик Рубика невозможно собрать.
- Король собрал 100 мудрецов и предложил им испытание. А именно, в одной из комнат он расположил в ряд 100 шкатулок и в каждую положил по бумажке с именем одного мудреца, при этом имя каждого мудреца написано только на одной бумажке. Мудрецы по очереди входят в эту комнату. Вошедший может открыть шкатулку, посмотреть, что в ней, открыть ещё одну, посмотреть, и так далее пока он не откроет 50 шкатулок. Если среди открытых шкатулок нет бумажки с именем мудреца, то его казнят; иначе он закрывает все шкатулки, возвращается и до конца испытания ни с кем не говорит. У мудрецов есть знакомый придворный короля, который до начала испытания может осмотреть все шкатулки и, если захочет, поменять две местами. Могут ли мудрецы и придворный договориться так, чтобы все мудрецы выжили?
- В классе mn одноместных парт образуют прямоугольник $m \times n$. Учитель рассадил mn школьников по одному за парту. Ученикам эта рассадка не понравилась, и они хотят пересесть. Они договорились с учителем, что на первой и третьей переменах они могут как угодно пересаживаться внутри строк, а на второй — как угодно внутри столбцов. Докажите, что к четвёртому уроку они могут добиться любой возможной рассадки.