

Планарные графы

Определение. Граф называется *планарным*, если его можно нарисовать на плоскости без пересечений рёбер. Такое изображение планарного графа на плоскости называется *плоским графом* (т.е. плоский граф – это планарный граф вместе с каким-то фиксированным изображением).

По умолчанию все графы в этом листке не имеют петель и кратных рёбер.

Обозначения: V – число вершин, E – число рёбер, F – число граней, K – число компонент связности.

Формула Эйлера. Для любого планарного графа выполнено $V - E + F - K = 1$.

Утверждение. Для любого связного планарного графа с хотя бы тремя вершинами выполнены неравенства $3F \leq 2E$ и $E \leq 3V - 6$.

Утверждение. Графы K_5 и $K_{3,3}$ не планарные.

1. Докажите, что в любом планарном графе найдется вершина степени 5 или меньше.
2. Можно ли ребра полного графа на 11 вершинах покрасить в два цвета так, чтобы ребра каждого цвета образовывали планарный граф?
3. Дан выпуклый многогранник с n вершинами. Найдите сумму всех его плоских углов (т.е. сумму всех углов всех его граней).
4. (а) Можно ли нарисовать граф K_5 без пересечений рёбер на поверхности бублика?
(б) Тот же вопрос для K_7 .
(в) Тот же вопрос для K_8 .
5. (а) На плоскости провели несколько прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. По этим прямым ползет муравей, при этом он на каждом перекрестке поворачивает либо влево, либо вправо. Через некоторое время муравей прополз по тому отрезку прямой, по которому двигался ранее. Докажите, что он полз в том же направлении.
(б) Те же условия, только теперь муравей ползает по рёбрам плоского графа, все вершины которого имеют степень 4.
6. Теорема о четырёх красках гласит, что вершины любого планарного графа без петель можно правильным образом раскрасить в четыре цвета. Из этой теоремы выведите следующее утверждение: если в планарном графе нет мостов и степень каждой вершины равна 3, то его ребра можно правильным образом раскрасить в 3 цвета.
7. Жук ползает по замкнутому маршруту по рёбрам додекаэдра, нигде не разворачиваясь назад. Маршрут проходит ровно два раза по каждому ребру. Докажите, что некоторое ребро жук оба раза проходит в одном и том же направлении.